Universidad Carlos III de Madrid

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Departamento de Economía

# Coaliciones y Competencia Perfecta

Emma Moreno García

Director:
Carlos Hervés Beloso

Madrid, 1996

# Coaliciones y competencia perfecta

Emma Moreno García

# Coaliciones y Competencia Perfecta

*Memoria que presenta para optar al grado de*
*Doctor en Economía*


Emma Moreno García

*Dirigida por el Prof.*

Dr. D. Carlos Hervés Beloso

Departamento de Matemáticas

Facultad de Economía

Universidad de Vigo


Junio 1996

*a mis padres*

No tengo ninguna duda de que mi primer y más sincero agradecimiento es para el Prof. Dr. D. Carlos Hervés Beloso; por todo lo que de él y con él aprendí, por el ejemplo profesional que siempre mostró, por la confianza que en todo momento depositó en mí, por su inestimable ayuda y por el estímulo, no sólo científico, sino también humano que de él recibí.

Agradezco también a los Profesores Dr. D. Mario Páscoa y Dr. D. Carmelo Nuñez sus valiosos comentarios y el tiempo que me han dedicado.

Quiero también agradecer al Departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid las facilidades que me ha proporcionado. En especial el interés de los compañeros y amigos de este Departamento. Y en particular las útiles sugerencias del Prof. Dr. D. Diego Moreno.

Por último, agradezco a mi familia el ánimo y apoyo que constantemente me ofrecieron.

# Índice

# Introducción

La memoria que se presenta, "Coaliciones Competencia Perfecta", consta una introducción y cinco capítulos. Si bien cada capítulo es autocontenido y tiene una unidad temática en sí mismo, todos tienen una línea de investigación común que se relaciona con la formación de coaliciones de agentes y el problema de la competencia perfecta.

El capítulo I se ocupa de estudiar que ocurre cuando se considera una economía con un continuo de agentes que se comportan estratégicamente en rescursos y preferencias.

En el capítulo II, suponemos que sólo una parte del conjunto de todas las coaliciones posibles de una economía son coaliciones permitidas. Estudiamos las consecuencias que este supuesto tiene a los efectos del mecanismo del veto.

El capítulo III contiene distintos planteamientos discretos de economías continuas. Estudiamos propiedades de las economías discretas asociadas a una economía continua inicial, y analizamos los efectos que, cada modo de discretizar, tiene en el mecanismo del veto.

En el capítulo IV se define un test de competencia perfecta, que denominamos test de compatibilidad de incentivos coalicionales. Obtenemos que en el caso finito-dimensional, existe un conjunto genérico de economías que supera dicho test.

El capítulo V es un trabajo conjunto con Mario Pascoa (Universidade Nova de Lisboa). Estudiamos el test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el caso de economías con un continuo de agente y definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita.

Más concretamente:

En el primer capítulo, consideramos una economía con un continuo de agentes que se comportan estratégicamente. Definimos diferentes nociones de equilibrio estratégico, y probamos que el comportamiento estratégico y el comportamiento precio-aceptante de los agentes conducen a idéntico resultado. Distintas precisiones de los conjuntos de esrategias permiten analizar diferentes situaciones como casos pariculares del planteamiento general. Así, por ejemplo, las estrategias pueden considerarse como recursos y preferencias que, en definitiva, son las que caracterizan a un agente en una economía de intercambio. Si las preferencias se definen únicamente como dotaciones, dejando invariantes las preferencias, puede interpretarse como una situación donde se "queman" bienes con la intención de incrementar precios, como ocurre en ocasiones cuando hay exceso de producción de determinadas mercancías. El resultado de equivalencia que obtenemos entre el equilibrio estratégico y competitivo, es una justificación más de que nos refiramos a las economías continuas como economías perfectamente competitivas.

En el capítulo II establecemos algunas consideraciones sobre el mecanismo del veto. Este mecanismo conduce a la noción de núcleo de una economía y, por un proceso límite, al equilibrio de Edgeworth (asignaciones que no están vetadas en ninguna de las réplicas de la economía). Para formalizar el concepto de núcleo es necesaria la consideración del veto de coaliciones de agentes. La formación de coaliciones presenta dificultades teóricas debidas, por ejemplo, a necesidad y coste de información, coste asociado a la propia formación de coaliciones, incompatibilidad entre distintos agentes que se niegan a cooperar unos con otros, ... Por ello, suponemos que sólo una parte $\mathcal{S}$ del conjunto de todas las coaliciones posibles de una economía $\mathcal{E}$ son coaliciones permitidas. Nos interesamos, en este capítulo por las consecuencias que este supuesto tiene a los efectos del mecanismo del veto. La idea de restringir las coaliciones permitidas a un conjunto $\mathcal{S}$, conduce a los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de una economía $\mathcal{E}$, que generalizan respectivamente las nociones clásicas de núcleo y equilibrio de Edgeworth. Estudiamos propiedades de estos conceptos. Aportamos una caracterización del concepto $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, mediante la definición de los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy y $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy con coeficientes racionales. Probamos que, bajo determinadas hipótesis, para conseguir asignaciones del núcleo, de equilibrio walrasiano, equilibrios de Edgeworth o asignaciones del núcleo fuzzy de una economía, no es necesario considerar la formación de todas las coaliciones, sino que es suficiente permitir el veto de un subconjunto de coaliciones $\mathcal{S}$, distinto del total. Estos resultados son establecidos tanto para economías definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita, como para el caso infinito-dimensional.

En el capítulo III, consideramos una economía perfectamente competitiva (esto es, una economía con un continuo de agentes representados por un espacio de medida sin átomos). En los modelos de economías continuas o economías sin átomos , la influencia de cada agente (o de un conjunto de agentes de medida cero) es nula, porque la integral no cambia si el comportamiento de tales agentes se modifica. La elegancia matemática de estos modelos no está libre de críticas, en el sentido de que frecuentemente la realidad económica sólo permite distiguir un número finito de participantes. Por ello, planteamos en este capítulo diferentes modos de discretizar economías continuas, estudiando propiedades de las economías discretas asociadas y analizando algunos efectos que, la manera de discretizar correspondiente, tiene en el Mecanismo del Veto. Interpretamos que el observador o el mercado sólo percibe en la economía sin átomos un número finito de características distintas y, por tanto, las preferencias de los agentes que se incluyen en un mismo tipo, son estimadas como una única preferencia. Por ejemplo, el obsevador puede apreciar un conjunto de agentes que le parecen idénticos, con unos recursos y unas preferencias que son la media de los recursos y las preferencias de todo el conjunto de agentes. También puede estimar que un consumo es preferido a otro si es unánimemente preferido por todo el conjunto de agentes que percibe como iguales. Incluso, podría pensarse que el observador no distingue todas las preferencias individuales, pero tiene capacidad para medir el tamaño relativo de los grupos de agentes que prefieren un consumo a otro. En este caso, percibiría una preferencia que denominamos mayoritaria. Para formalizar estas ideas, dada una economía continua $\mathcal{E}_c$, definimos para cada $n$ entero positivo una economía continua $\mathcal{E}_c^n$ de $2^n$ tipos, y la economía discreta asociada $\mathcal{E}_n$ de $2^n$ agentes. Estudiamos propiedades de las distintas preferencias, como la preferencia unánime o la mayoritaria. Junto con resultados conocidos, que relacionan economías con un número finito de tipos con economías discretas, obtenemos otros que permiten caracterizar las asignaciones del núcleo de la economía continua. Esto es, obtenemos resultados sobre estados del núcleo de la economía continua en función de los estados de las economías continuas de $2^n$ tipos o de las economías discretas asociadas. Así, por ejemplo, un estado del núcleo de la economía continua puede interpretarse como un estado del núcleo de cualquier economía discreta asociada.

El objetivo del capítulo IV es estudiar propiedades del mecanismo competitivo referentes a incentivos coalicionales. Para ello, formalizamos tests de competencia perfecta en términos de los incentivos que las coaliciones tienen para desviarse de un comportamiento precio-aceptante en función de su tamaño.

Se sabe que en economías con un número finito de agentes hay incentivos a no adoptar un comportamiento precio-aceptante. Si un agente se comporta estratégicamente, puede manipular la formación de precios en su propio beneficio. Es decir, el mecanismo competitivo no es compatible en incentivos individualmente y, por tanto, tampoco es compatible en incentivos coalicionalmente. En economías continuas un agente individual (o un conjunto de agentes de medida nula) no influye en la formación de precios por un cambio de comportamiento. Sin embargo, si una coalición actúa estratégicamente puede modificar los precios de equilibrio en beneficio de todos los individuos que la constituyen. A pesar de que en economías sin átomos las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. De hecho, para concluir que una economía continua es perfectamente competitiva deberíamos poder decir que tiene la propiedad de que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Interpretamos esta propiedad como un test de competencia perfecta, y nos referiremos a él como test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Para formalizar este tipo de tests de competencia perfecta, consideramos que el incentivo de una coalición a desviarse de un comportamiento precio-aceptante es medido bien por el incremento medio de utilidad indirecta que puedan conseguir los agentes que la forman o bien por el incremento agregado de ésta. Probamos que para un conjunto genérico de economías continuas, definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita, el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo puede ser despreciado si el tamaño de la coalición es arbitrariamente pequeño. Los resultados establecidos para economías continuas admiten interpretaciones discretas que conducen a resultados límites sobre compatibilidad de incentivos coalicionales para sucesiones de economías finitas, donde aumenta el número de agentes, generalizando los resultados obtenidos por Roberts y Postlewaite (1976).

Los resultados que se obtienen en el capítulo IV, ponen de manifiesto que, en el caso finito-dimensional, el problema de la competencia perfecta se resuelve al considerar un continuo de agentes, en el sentido de que los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no son manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños.

El objetivo del capítulo V es estudiar el test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el caso infinito-dimensional.

Ostroy y Zame (1994) muestran que, en general, el hecho de considerar un continuo de agentes no resuelve el problema de la competencia perfecta. Argumentan que si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, entonces es el "grosor" de los mercados, más que la no existencia de átomos, lo que conduce a la competencia perfecta. Las condiciones de "grosor" de la economía hacen referencia, básicamente, a las relaciones marginales de sustitución entre mercancías por parte de los agentes y a las propiedades de continuidad de preferencias. Más aún, muestran que esta misma condición de "espesor" o "grosor" de los mercados, que conduce a la equivalencia Core-Walras, garantiza la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio.

Así, en el capítulo V, consideramos una economía con un continuo de agentes definida sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita. Probamos que, bajo determinados supuestos (precisamente los supuestos de "grosor" de los mercados que establecen Ostroy y Zame), el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo puede ser despreciado si el tamaño de la coalición es arbitrariamente pequeño. Esto es, el mecanismo competitivo supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el modelo de economías que hemos establecido con un continuo de agentes y un espacio de mercancías infinito-dimensional.

La literatura económica sugiere varios tests para distinguir la existencia de equilibrio walrasiano del supuesto de competencia perfecta, esto es, de suponer un comportamiento precio-aceptante por parte de los agentes.

Los resultados obtenidos en la Tesis conducen a preguntarse si son equivalentes, al menos genéricamente, cualquiera de los tests de competencia perfecta. Concretamente, en el caso finito-dimensional ¿el test de equivalencia Core-Walras es equivalente a los tests de compatibilidad de incentivos coalicionales?. Más aún, nos preguntamos si cualquiera de estos tests de competencia perfecta son una caracterización de las economías perfectamente competitivas. Por ejemplo, el hecho de que una economía verifique que el veto de coaliciones pequeñas elimine los estados que no son de equilibrio competitivo, ¿permite concluir que dicha economía supera cualquiera de los tests de competencia perfecta a que hemos hecho referencia?. Es decir, en economías que no sean física o económicamente "espesas" (thin market economies), ¿no es cierto que sea suficiente considerar el veto de coaliciones pequeñas para obtener los estados del núcleo y de equilibrio?. Será objeto de investigaciones posteriores tratar de dar respuesta a este tipo de preguntas.

# Capítulo I

# Equilibrio Estratégico en economías con un continuo de agentes

# 1 Introducción

Se sabe que considerar en los agentes comportamientos estratégicos no conduce, en general, a los mismos resultados que se obtendrían de suponer el comportamiento precio-aceptante. Sin embargo, trabajos como el, recientemente publicado, de Codognato y Gabszewicz (1993) inducen a pensar que en economías contínuas otros conceptos de equilibrio pueden llevar a los mismos resultados que el equilibrio competitivo. En esta nota, se considera una economía de intercambio puro, donde hay un contínuo de agentes que se comportan estratégicamente y se definen los conceptos de equilibrio estratégico y equilibrio estratégico generalizado con el objetivo de realizar un estudio comparativo con los modelos de competencia perfecta.

Distintas precisiones de los conjuntos de estrategias nos permiten analizar diferentes situaciones como casos particulares del planteamiento general. Así, por ejemplo, las estrategias pueden considerarse como dotaciones y preferencias que, en definitiva, son las que caracterizan a un agente en una economía de intercambio. Si las estrategias se definen únicamente como dotaciones, dejando invariantes las preferencias, puede interpretarse como aquella situacion en la que se queman bienes con la intención de incrementar los precios, como ocurre en ocasiones con ciertos países productores de café. Una situación intermedia en la que las estrategias son básicamente recursos es la que recoge el modelo planteado por Codognato y Gabszewicz (1993).

En este trabajo se obtiene la equivalencia entre el equilibrio estratégico y el equilibrio competitivo sin imponer restricciones sobre la estructura de las dotaciones iniciales, sin suponer unicidad de equilibrio y, generalizando el conjunto de estrategias. En concreto, se prueba que los conceptos de equilibrio estratégico y equilibrio estratégico generalizado son equivalentes y que el conjunto de asignaciones resultantes de tales equilibrios coincide con el conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo; en particular, declarar las verdaderas características es un perfil de equilibrio estratégico. El resultado es justificación más de que nos refiramos a las economías contínuas como economías perfectamente competitivas.

El resto del artículo se organiza como sigue.En la sección 2, utilizando el lenguaje propio de la teoría de incentivos, se plantea el modelo, se establecen las notaciones y se formalizan los conceptos de equilibrio estratégico y equilibrio estratégico generalizado. En la sección 3, se define el conjunto de estrategias asociado a cada agente comocualquier subconjunto del conjunto de dotaciones y preferencias, con la única restricción de que las primeras no superen las reales y que las verdaderas características de cada agente estén en dicho subconjunto. Se demuestra la equivalencia entre los distintos conceptos de equilibrio, bajo las hipótesis habituales que garantizan la existencia de equilibrio competitivo. En la sección 4 se plantea un ejemplo de una economía con un conjunto finito de agentes, donde no se verifican los resultados obtenidos para economías continuas. En la sección 5, se consideran distintos conjuntos particulares de estrategias, que permiten interpretaciones económicas concretas. Por último, la sección 6 contiene algunos comentarios y observaciones sobre el modelo planteado y los resultados obtenidos.

# 2 El modelo

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$, con un contínuo de agentes representados por el intervalo $I = [0,1]$. Cualquier individuo $t \in I$ tiene como conjunto de consumo $X_t$ el ortante positivo de $\mathbb{R}^\ell$, donde $\ell$ denota el número de los diferentes bienes que se intercambian en el mercado. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por sus dotaciones iniciales $\omega_t$ y sus preferencias sobre su conjunto de consumo $X_t = \mathbb{R}^\ell_+$, representables por funciones de utilidad contínuas $U_t : X_t \longrightarrow \mathbb{R}$. Así, la economía $\mathcal{E}$ viene definida por dotaciones y utilidades $(\omega_t, U_t)$, para cada agente $t \in I$.

Una asignación es una función $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^\ell_+$ $\mu$-integrable. Una asignación $x$ es factible si $\int_I x(t)d\mu \leq \int_I \omega_t d\mu$, donde $\mu$ denota la medida de Lebesgue sobre los subconjuntos medibles de $I$.

Un equilibrio competitivo para la economía $\mathcal{E}$ es un par $(p^*, x^*)$, formado por un sistema de precios no nulo $p^* \in \mathbb{R}^\ell_+$ y una asignación factible $x^*$, de modo que existe un conjunto medible $J \subseteq I$ con $\mu(J) = \mu(I)$, tal que para todo $t \in J$ se satisface
a) $\quad x^*(t) \in B_t(p^*)$ , y
b) $\quad B_t(p^*) \bigcap \{ x \in \mathbb{R}^\ell_+ : U_t(x) > U_t(x^*(t)) \} = \emptyset$,
donde $B_t(p^*) = \{x \in \mathbb{R}^\ell_+ : p^*x \leq p^*\omega_t\}$ es la restricción presupuestaria del agente $t$ cuando $p^*$ es el sistema de precios que prevalece. Es decir, $(p^*, x^*)$ es equilibrio competitivo si el conjunto de agentes para el que no se verifica a) y b) es de medida cero.

Supongamos que los agentes adoptan comportamientos estratégicos y denotemos por $\Theta_t$ el conjunto de estrategias del agente $t \in I$. Dado que en una economía de intercambio, fijado el conjunto de agentes $I$, éstos se caracterizan por sus preferencias y dotaciones iniciales, podemos decir que las estrategias consisten en falsificar tales características y, en consecuencia, en falsificar sus demandas. Cualquier individuo $t \in I$, con recursos iniciales $\omega_t$ y función de utilidad $U_t$, dispone de la opción de no poner toda su dotación en el mercado así como de la posibilidad de declarar preferencias distintas de las reales. Sin embargo, los conjuntos de consumo serán invariantes. Dada la economía de intercambio $\mathcal{E}$, consideramos como conjunto de estrategias para un agente $t \in I$ cualquier conjunto $\Theta_t \subseteq \{ (\theta_t, U_{\theta_t}),$ tal que $0 \leq \theta_t \leq \omega_t$ y, $U_{\theta_t} : X_t \to \mathbb{R}$ es contínua $\}$, tal que $(\omega_t, U_t) \in \Theta_t$.

Un perfil de estrategias es una aplicación $\theta : I \longrightarrow \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, que asocia a cada agente $t \in I$ una estrategia $\theta(t) = (\theta_t, U_{\theta_t}) \in \Theta_t$. En este sentido, los agentes pueden aparentar economías diferentes de la inicial $\mathcal{E}$. Denotemos por $\mathcal{E}_\theta$ la economía virtual que resulta si los agentes declaran un perfil de estrategias $\theta$, es decir, $\mathcal{E}_\theta \equiv \Big( X_t = \mathbb{R}^\ell_+, \ (\theta_t, U_{\theta_t}), t \in I \Big)$.

Un mecanismo de asignación es una función $f$, que asocia a cada economía $\mathcal{E}$ una asignación factible $f(\mathcal{E})$. Denotaremos por $f_t(\mathcal{E})$ la asignación que recibe el agente $t$ en la economía $\mathcal{E}$. Un mecanismo $f$ se dice compatible en incentivos individualmente si, dada cualquier economía inicial $\mathcal{E}$, se verifica para casi todo $t \in I$ que $U_t(f_t(\mathcal{E})) \geq U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta(t)}))$, cualquiera que sea $\theta(t) \in \Theta_t$, donde $\mathcal{E}_{\theta(t)}$ es la economía que coincide con $\mathcal{E}$ salvo en un agente $t \in I$, que vendría caracterizado por $(\theta_t, U_{\theta_t})$, en vez de por $(\omega_t, U_t)$.

Sea $f$ un mecanismo de asignación que asocia a cada economía virtual $\mathcal{E}_\theta$ una asignación de equilibrio competitivo. En esta nota estableceremos hipótesis que garantizan la existencia de equilibrio walrasiano y que formalizaremos en la sección siguiente. Así, dada la posibilidad de multiplicidad de equilibrios, debemos efectuar algún tipo de selección. Para ello, en el conjunto de economías aparentes decimos que la economía $\mathcal{E}_\theta$ está relacionada con la economía $\mathcal{E}_{\theta'}$, y denotamos $\mathcal{E}_\theta \mathcal{R} \mathcal{E}_{\theta'}$, si el conjunto de precios de equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}_\theta$ coincide con el conjunto de precios de equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}_{\theta'}$. Obviamente $\mathcal{R}$ define una relación de equivalencia. Sea $\tilde{P}$ una aplicación definida en el conjunto cociente que asocia a cada clase de equivalencia $[\mathcal{E}_\theta]$ un sistema de precios de equilibrio walrasiano $\tilde{P}([\mathcal{E}_\theta])$ de cualquier economía de la clase $[\mathcal{E}]$. Denotemos por $P$ la aplicación que a cada economía $\mathcal{E}_\theta$ le asigna $P(\mathcal{E}_\theta) = \tilde{P}([\mathcal{E}_\theta])$ y denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de mecanismos walrasianos $f$ tales que para cada clase de equivaencia $[\mathcal{E}_\theta]$ existe $J \subseteq I$ con $\mu(J) = \mu(I)$, de modo que cualquiera que sea la economía $\mathcal{E}_{\theta'} \in [\mathcal{E}_\theta]$, y cualquiera que sea $t \in J$ se verifica

a) $\quad f_t(\mathcal{E}_{\theta'}) \in B_{\theta'_t}(p)$ , y

b) $\quad B_{\theta'_t}(p) \bigcap \{ \, x \in \mathbb{R}^\ell_+ : U_{\theta'_t t}(x) > U_{\theta'_t}(f_t(\mathcal{E}_{\theta'})) \, \} = \emptyset,$

siendo $p = \tilde{P}([\mathcal{E}_\theta])$ y $B_{\theta'_t}(p) = \{x \in \mathbb{R}^\ell_+ : px \leq p\theta'_t\}$ es el conjunto presupuestario del agente $t$ en la economía $\mathcal{E}_{\theta'}$ cuando $p$ es el sistema de precios que prevalece. Nótese que lo único que estamos diciendo es que si $f \in \mathcal{F}$ entonces $f$ selecciona asignaciones walrasianas de modo que para cada clase de equivalencia existe un subconjunto de agentes de medida total en el que las restricciones presupuestarias "no explotan".

Con este planteamiento, decimos que un equilibrio estratégico para la economía $\mathcal{E}$ es un par que consiste en un perfil de estrategias $\theta^*$ y una asignación $x^*$, de la forma $x^*(t) = \tilde{x}(t) + \omega_t - \theta^*_t$, con $\tilde{x}$ asignación de equilibrio walrasiano de la economía aparente $\mathcal{E}_{\theta^*}$. Además el perfil $\theta^*$ debe verificar que no exista un conjunto de agentes de medida positiva de manera que todos ganen desviándose unilateralmente. Nótese que para cualquier $\mathcal{E}_\theta$ y para cualquier $f \in \mathcal{F}, \ \ x(t) = f_t(\mathcal{E}_\theta) + \omega_t - \theta_t$ es una asignación factible para la economía de partida $\mathcal{E}$. A continuación establecemos formalmente la definición del concepto de equilibrio estratégico. Para ello, denotemos por $\mathcal{E}_{\theta \backslash \theta'(t)}$ la economía que coincide con $\mathcal{E}_\theta$, salvo en el agente $t \in I$, que declara características $(\theta'_t, U_{\theta'_t})$.

**Definición** 2.1 . *Un* **equilibrio estratégico** *para la economía $\mathcal{E}$ es un par $(\theta^*, x^*)$, donde $\theta^*$ es un perfil de estrategias y $x^*$ es una asignación factible, tales que existe $f \in \mathcal{F}$ y un conjunto $J \subseteq I$, con $\mu(J) = \mu(I)$, tales que para todo $t \in J$*

*a)* $x^*$ *puede escribirse de la forma* $x^*(t) = f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) + \omega_t - \theta_t^*$, *y además*

*b)* $U_t(x^*(t)) \geq U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta^* \setminus \theta(t)}) + \omega_t - \theta_t)$, *para todo* $\theta(t) \in \Theta_t$.

Supongamos que el perfil de equilibrio $\theta^*$ es el que asocia a cada agente sus características reales, y definamos el mecanismo $g$ como $g_t(\mathcal{E}_\theta) = f_t(\mathcal{E}_\theta) + \omega_t - \theta_t$. Nótese que, entonces la condición b) de la definición 1 equivale a la compatibilidad en incentivos de $g$. Obsérvese también que la definición de equilibrio estratégico lleva implícito el que los agentes consumen la totalidad de aquello que no llevan al mercado. Supongamos ahora que los agentes se comportan estratégicamente en el sentido previamente establecido, pero que no tienen por qué consumir todo aquello que no declaran, bien porque ellos mismos decidan la proporción a consumir de las cantidades de bienes que ocultan, o bien porque tal proporción les sea dada en función de su estrategia. Así pues, sea $D$ una aplicación que asocia a cada estrategia $\theta(t)$ una matriz diagonal $D_{\theta(t)}$ de orden $\ell \times \ell$, con $0 \leq (D_{\theta(t)})_{jj} \leq 1$ para $j = 1, \ldots, \ell$. Interpretamos $(D_{\theta(t)})_{jj}$ como la proporción que va a consumir el agente $t$ del total ocultado por dicho agente del bien $j$ si su estrategia es $\theta(t)$. Esto es, si un agente $t \in I$ declara características $\Theta(t) = (\theta_t, U_{\theta_t})$, la cantidad de aquello que no declara y dedica al consumo es $(\omega_t - \theta_t)D_{\theta(t)}$. La aplicación $D$ es por tanto un dato, que puede entenderse bien como una decisión de los propios agentes,o bien como un sistema de impuestos. Tales impuestos podrían interpretarse como un coste asociado a no declarar la verdad. Esta idea conduce al concepto que denominamos equilibrio estratégico generalizado y que establecemos formalmente a continuación. En la sección siguiente se prueba que dicho concepto está bien definido.

**Definición** 2.2 *Un* **equilibrio estratégico generalizado** *para la economía $\mathcal{E}$ es un par $(\theta, \mathrm{x})$, donde $\theta$ es un perfil de estrategias y $\mathrm{x}$ es una asignación factible, tales que existe $f \in \mathcal{F}$ y un conjunto $J \subseteq I$, con $\mu(J) = \mu(I)$, tales que para todo $t \in J$*

*a)* $\mathrm{x}$ *puede escribirse de la forma* $\mathrm{x}(t) = f_t(\mathcal{E}_\theta) + \omega_t - \theta_t$, *y además*

*b)* $U_t(f_t(\mathcal{E}_\theta) + (\omega_t - \theta_t)D_{\theta(t)}) \geq U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta \setminus \theta'(t)}) + (\omega_t - \theta_t')D_{\theta'(t)})$, *para todo* $\theta'(t) \in \Theta_t$.

Nótese que si el perfil de equilibrio estratégico generalizado $\theta$ es el perfil de las características reales, y definimos el mecanismo $G$ como $G_t(\mathcal{E}_\theta) = f_t(\mathcal{E}_\theta) + (\omega_t - \theta_t)D_{\theta(t)}$, entonces la condición b) de la definición 2 equivale a la compatibilidad en incentivos de $G$. Si $D$ es la aplicación nula dicha condición equivale a la compatibilidad en incentivos del mecanismo walrasiano. Nótese además que si para todo $t \in I$ la matriz diagonal $D_{\theta(t)}$ es la matriz identidad para todo $\theta(t) \in \Theta_t$, entonces la noción de equilibrio estratégico generalizado coincide con la noción de equilibrio estratégico.

# 3 El resultado fundamental

Nuestro objetivo es probar que en la situación planteada tanto el conjunto de asignaciones de equilibrio estratégico generalizado como el conjunto de asignaciones de equilibrio estratégico coincide con el conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano. Para ello, suponemos que la economía inicial $\mathcal{E}$ verifica las hipótesis que establece Aumann (1964) para la existencia de equilibrio competitivo en economías contínuas
(H.1) $\omega = \int_I \omega_t d\mu >> 0$, esto es, $\omega$ es estrictamente positiva en todas sus componentes,
(H.2) las funciones de utilidad son estrictamente crecientes en todos sus argumentos, y
(H.3) las funciones $U_t(x)$ son medibles en $x$ y en $t$ simultáneamente, considerando en el conjunto de funciones contínuas de $\mathbb{R}_+^\ell$ en $\mathbb{R}$ la topología compacto-abierta.

Para garantizar también la existencia de equilibrio competitivo en cualquiera de las economías virtuales, exigimos que los perfiles posibles verifiquen los supuestos anteriores. Dada la economía de partida $\mathcal{E}$, denotemos por $A(\mathcal{E})$ el conjunto de todas las economías $\mathcal{E}_\theta$ que los agentes pueden aparentar, es decir, el conjunto de economías virtuales $\mathcal{E}_\theta$, con $\theta$ perfil de estrategias permitido. Un perfil de estrategias $\theta$ es permitido si y sólo si las funciones de utilidad $U_{\theta_t}$ verifican (H.2) y (H.3), y además $\int_I \theta_t d\mu >> 0$. La razón de exigir que un perfil verifique $\int_I \theta_t d\mu >> 0$ es simplemente garantizar el supuesto (H.1). Nótese que en otro caso estaríamos considerando economías con espacios de consumo de menor dimensión. De este modo, podemos afirmar que si $\mathcal{E}_\theta \in A(\mathcal{E})$, entonces $\mathcal{E}_\theta$ satisface los supuestos establecidos para $\mathcal{E}$ y aseguramos que el mecanismo $f$ está bien definido sobre $A(\mathcal{E})$ .

Los supuestos anteriores, nos permiten establecer el resultado fundamental. Si $(p^*, x^*)$ es un equilibrio walrasiano de la economía de partida $\mathcal{E}$, existe un perfil de estrategias $\theta^*$, tal que $(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$. Recíprocamente, si $(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$, existe $p^*$ tal que $(p^*, x^*)$ es un equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}$.

**Teorema 3.1** . *$x^*$ es una asignación de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ si y sólo si $x^*$ es una asignación de equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$.*

*Demostración.* Sea $(p^*, x^*)$ equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$. Denotemos por $\theta^*$ el perfil que definen las características reales, esto es, $\theta^*(t) = (\omega_t, U_t)$ y, por tanto $\mathcal{E}_{\theta^*} = \mathcal{E}$. Tomemos $\tilde{P}$ tal que $\tilde{P}([\mathcal{E}_{\theta^*}]) = p^*$ y $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(\mathcal{E}_{\theta^*}) = x^*$. Sea $D_{\theta(t)}$ la matriz diagonal asociada a la estrategia $\theta(t)$. Definamos el mecanismo de asignación auxiliar $G$ como $G_t(\mathcal{E}_\theta) = f_t(\mathcal{E}_\theta)+(\omega_t-\theta_t)D_{\theta(t)}$ y veamos que $G$ es compatible en incentivos individualmente, lo que equivale, en esta situación, a la condición b) de la definición 2 y, en consecuencia, nos permitiría concluir que $(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico generalizado de $\mathcal{E}$. Por ser $\mu$ sin átomos, tenemos que $\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)} \in [\mathcal{E}_{\theta^*}] = [\mathcal{E}]$, cualquiera que sea la característica $\theta(t) \in \Theta_t$ que el agente $t$ declare. Por tanto $P(\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)}) = P(\mathcal{E}_{\theta^*}) = p^*$. De la definición de $\mathcal{F}$ se deduce que existe $J$ con $\mu(J) = \mu(I)$, tal que para todo $t \in J$ y para cualquier $\theta(t) \in \Theta_t$ se tiene que $f_t(\mathcal{E}_{\theta(t)})+(\omega_t-\theta_t)D_{\theta(t)} \in B_t(p^*)$, cualquiera que sea $D_{\theta(t)}$ en las condiciones establecidas. Además $f_t(\mathcal{E})$ maximiza $U_t$ sobre $B_t(p^*)$, para todo $t \in J$. Así pues, podemos concluir que cualquiera que sea $\theta(t) \in \Theta_t$ se verifica que $U_t(f_t(\mathcal{E})) \geq U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta(t)}))+(\omega_t-\theta_t)D_{\theta(t)}) = U_t(G_t(\mathcal{E}_{\theta(t)}))$, para casi todo $t \in I$, lo que significa que $G$ es compatible en incentivos individualmente. En consecuencia el perfil de estrategias formado por las verdaderas características junto a una asignación de equilibrio competitivo constituyen un equilibrio estratégico generalizado.

Recíprocamente, si $(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$, por definición, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $x^*(t) = f_t(\mathcal{E}_{\theta^*})+\omega_t-\theta_t^*$; además, para casi todo $t \in I$ y cualquiera que sea $\theta(t) \in \Theta_t$, se verifica que $U_t\left(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) + \omega_t - \theta_t^*\right) \geq U_t\left(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)}) + \omega_t - \theta_t\right)$. Sea $p^* = P(\mathcal{E}_{\theta^*})$ el sistema de precios con el que $f(\mathcal{E}_{\theta^*})$ un estado de equilibrio walrasiano de $\mathcal{E}_{\theta^*}$. Veamos que $(p^*, x^*)$ es equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$. Como para algún $J \subseteq I$, con $\mu(J) = \mu(I)$ se verifica que $f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) \in B_{\theta_t^*}(p^*)$ para todo $t \in J$, deducimos que $x^*(t) = f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) + \omega_t - \theta_t^* \in B_t(p^*)$ para casi todo $t \in I$. Falta probar que $x^*(t)$ maximiza $U_t$ sobre $B_t(p^*)$ para casi todo $t \in I$. Supongamos que no ocurre así. Entonces existe $S \subseteq I$, con $\mu(S) > 0$ y existen vectores $x(t) \in B_t(p^*)$, tal que $U_t(x(t)) > U_t(x^*(t))$ para todo agente $t$ de $S$. El perfil de equilibrio estratégico $\theta^*$ debe verificar *i)* $\theta^*(t) = (\omega_t, U_t)$, para todo $t \in S' \subset S$, con $\mu(S') > 0$, ó bien *ii)* $\theta^*(t) \neq (\omega_t, U_t)$, para casi todo $t \in S$. Si ocurre *i)*, entonces se tiene que para todo $t \in S'$ se verifica $U_t(x(t)) > U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}))$, pero entonces $(p^*, f(\mathcal{E}_{\theta^*}))$ no sería equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}_{\theta^*}$, en contradicción con la definición de $\mathcal{F}$ y, en consecuencia, con la condición a) de la definición de equilibrio estratégico generalizado. Si ocurre *ii)*, consideremos para casi todo $t \in S$ la estrategia $\theta(t) = (\omega_t, U_t)$. Como ya se ha señalado $P(\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)}) = P(\mathcal{E}_{\theta^*}) = p^*$. Por tanto $f(\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)})$ es un estado de equilibrio competitivo con precios $p^*$. Entonces, como para todo $t \in S$ se tiene que $x(t) \in B_t(p^*)$, por definición de $\mathcal{F}$, obtenemos que para casi todo $t \in S$ se verifica que $U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*\setminus\theta(t)})) \geq U_t(x(t)) > U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) + \omega_t - \theta_t^*) \geq U_t(f_t(\mathcal{E}_{\theta^*}) + (\omega_t - \theta_t^*)D_{\theta^*(t)})$, en contradicción con la condición b) de la definición de equilibrio estratégico generalizado.

Q.E.D.

Nótese que de la prueba de este resultado de equivalencia se deduce que en economías contínuas el concepto equilibrio estratégico generalizado es independiente del valor de las matrices diagonales $D_{\theta(t)}$ en las condiciones establecidas y, en consecuencia, está bien definido. Sin embargo, en economías finitas no tiene sentido hablar de equiligrio estratégico generalizado pues, en general, depende de los valores concretos que tome la aplicación $D$. Por ello, si consideramos economías con un conjunto finito de agentes debemos introducir la noción de equilibrio estratégico asociado a $D$ o equilibrio $D$-estratégico, siendo $D$ previamente fijada. El hecho de que en economías contínuas la definición de equilibrio estratégico generalizado sea correcta y las asignaciones resultantes de dicho equilibrio coincidan con las asignaciones walrasianas, permite obtener otros resultados de equivalencia, que establecemos a continuación.

**Corolario** 3.1 *$x^*$ es una asignación de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ si y sólo si $x^*$ es una asignación de equilibrio estratégico de la economía $\mathcal{E}$.*

*Demostración.* Basta tomar para casi todo $t \in I$ $D_{\theta(t)}$ como la matriz identidad cualquiera que sea $\theta(t) \in \Theta_t$.

Q.E.D.

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

**Corolario** 3.2 *$(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$ si y sólo si $(\theta^*, x^*)$ es equilibrio estratégico de la economía $\mathcal{E}$.*

Obsérvese que en esta nota es fundamental la consideración del contínuo de agentes. Ello se debe a que en economías contínuas un agente individual no tiene capacidad para variar los precios de equilibrio. Es más, en economías sin átomos la influencia de cada agente (o de un conjunto de agentes de medida cero) es nula. No sucede así en economías finitas, donde un agente puede influir en la formación de precios de equilibrio. De hecho, el resultado de equivalencia entre equilibrio estratégico y equilibrio walrasiano no se verifica si se considera un conjunto finito de agentes. Un ejemplo similar al que aparece en el citado trabajo de Codognato y Gabszewicz (1993) podría servir aquí de contraejemplo para probar que en economías finitas las asignaciones de equilibrio estratégico pueden diferir de las de equilibrio competitivo. En el caso de economías finitas también pueden darse ejemplos donde un equilibrio estratégico no sea equilibrio $D$-estratégico para alguna aplicación $D$ determinada.

# 4 Un ejemplo con un conjunto finito de agentes

El objetivo de esta sección es plantear un ejemplo de una economía con un conjunto finito de agentes, que muestre que los resultados de equivalencia obtenidos para economías contínuas no son ciertos para el caso finito.

Consideremos una economía de intercambio $\mathcal{E}$ con dos bienes y tres agentes, definida por

$U_i(x_1, x_2) = \log x_1 + \log x_2 = U(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, 3.$

$\omega_1 = \omega_2 = (\frac{1}{2}, 0), \quad \omega_3 = (0, 1).$

Los conjuntos de estrategias para cada individuo son los siguientes

$\Theta_i = \{(\theta_i, U_{\theta_i}), \text{ tal que } 0 \leq \theta_i \leq \omega_i \text{ y } U_{\theta_i}(x) = U(x + \omega_i - \theta_i), \text{ con } x \in \mathbb{R}^2_+\}, \ i = 1, 2;$

y $\Theta_3 = \{(\omega_3, U)\}$.

Los agentes 1 y 2 se comportan estratégicamente en el bien 1, dado que sus recursos iniciales del bien 2 son nulos, mientras que el agente 3 es precio-aceptante. Por tanto, este ejemplo define una situación de ologopolio homogéneo.

El único equilibrio competitivo de la economía descrita es $(\bar{p}, \bar{x})$, con $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}^1 = \bar{x}^2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $\bar{x}^3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sin embargo, el único equilibrio estratégico viene dado por $(\theta^*, x^*)$, siendo $\theta_1^* = \theta_2^* = (\frac{1}{6}, 0)$, $\theta_3^* = (0, 1)$; $x_1^* = x_2^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ y $x_3^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Por tanto, la asignación de equilibrio competitivo no coincide con la asignación de equilibrio estratégico.

Para facilitar la notación, digamos que la estrategia de cada agente $i$ es un número real $\theta_i$, que denota la cantidad de bien 1 que lleva al mercado. Sea $D$ una aplicación que asocia a cada estrategia $\theta_i$ una matriz diagonal $D_{\theta_i}$ de orden dos por dos, tal que $(D_{\frac{1}{6}})_{11} = \frac{3}{10}$ y $(D_{\frac{1}{3}})_{11} = \frac{3}{5}$. En estas condiciones, el equilibrio estratégico $(\theta^*, x^*)$ no es equilibrio $D$-estratégico. En efecto, si tomamos $\theta_1 = \frac{1}{3}$, se tiene que $U_1(f_1(\mathcal{E}_{\theta^* \setminus \theta_1}) + (\omega_1 - \theta_1)D_{\theta_1}) = \log \frac{1}{30} > U_1(f_1(\mathcal{E}_{\theta^*}) + (\omega_1 - \theta_1^*)D_{\theta_1^*}) = \log \frac{1}{40}$. Señalemos, por último, que si $D$ fuese constante para cada agente $i$, es decir, $D_{\theta_i} = D_i$, o si $D$ fuese no creciente en $\theta_i$, entonces el equilibrio estratégico $(\theta^*, x^*)$ sería también equilibrio $D$-estratégico.

# 5 Algunas Aplicaciones

En esta nota se ha planteado un modelo de una economía de intercambio, donde hay un contínuo de agentes que se comportan estratégicamente. La definición de los conjuntos de estrategias es lo suficientemente general como para permitir considerar diversas situaciones. Así, podemos establecer que los agentes se comportan estratégicamente en dotaciones y preferencias. Sin embargo, pueden considerarse otros comportamientos estratégicos. Por ejemplo, que las estrategias consistan únicamente en ocultar parte de la dotación, manteniendo invariantes las preferencias. Incluso considerar una situación intermedia, donde las estrategias fuesen dotaciones y preferencias, pero estas últimas viniesen determinadas por las primeras y por las preferencias reales. Por otra parte, puede establecerse que no todos los agentes se comportan estratégicamente sino sólo algunos. En cualquier caso, se obtienen los resultados de equivalencia presentados en la sección 3. De hecho, como veremos a continuación, las situaciones citadas no son más que casos particulares del planteamiento más general.

Supongamos, en primer lugar, que los agentes se comportan estratégicamente en dotaciones y preferencias. Entonces, basta considerar en la economía $\mathcal{E}$, descrita en la sección 2, los conjuntos de estrategias definidos como $\Theta_t = \{ (\theta_t, U_{\theta_t}),$ tal que $0 \leq \theta_t \leq \omega_t$ y, $U_{\theta_t} : X_t \to \mathbb{R}$ es contínua $\}$, para cada agente $t \in I$. Los supuestos de existencia de equilibrio walrasiano en todas las economías aparentes garantizan los resultados de equivalencia.

Si los agentes actúan estratégicamente sólo en recursos, el conjunto de estrategias para cada agente $t \in I$ se reduce a $\Theta_t = \{\theta_t \in X_t, \text{ tal que } \theta_t \leq \omega_t\}$, dejando fijas las funciones de utilidad $U_t$. Las estrategias ahora no son pares, constituidos por dotaciones y preferencias, sino únicamente recursos; por ello, escribiremos $\theta(t) = \theta_t$. Suponemos también que la economía inicial $\mathcal{E}$ verifica los supuestos (H.1), (H.2) y (H.3), que garantizan la existencia de equilibrio competitivo. En este caso un perfil es permitido si y sólo si satisface (H.1). De este modo, se obtiene, como caso particular del teorema 1, que $x^*$ es una asignación de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ si y sólo si $x^*$ es una asignación de equilibrio estratégico generalizado de la economía $\mathcal{E}$. Para ello, basta tener en cuenta en la prueba que, en este caso, el perfil de equilibrio $\theta^*$ verifica $\theta^*_t = \omega_t$, para todo $t \in S' \subset S$, con $\mu(S') > 0$, ó bien $\theta^*_t \neq \omega_t$, para casi todo $t \in S$. Dado que los agentes declaran sus verdaderas preferencias, podría entenderse que ocultan parte de sus recursos no para consumo sino únicamente con la intención de manipular precios. En ese caso, la matriz $D_{\theta(t)}$ sería la matriz nula. Nótese que este ejemplo tiene interpretaciones económicas concretas. Representa situaciones donde se queman bienes. Se sabe que hay países y regiones donde el exceso de producción lleva a los poseedores del producto a tirar cantidades del mismo, con la intención de incrementar los precios. Así ocurre, por ejemplo, en ciertos países productores de café.

Supongamos ahora la situación intermedia, donde el conjunto de estrategias para cada agente $t \in I$ es $\Theta_t = \{(\theta_t, U_{\theta_t}), \text{ tal que } 0 \leq \theta_t \leq \omega_t \text{ y } U_{\theta_t}(x) = U_t(x + \omega_t - \theta_t), \text{ con } x \in X_t = \mathbb{R}^\ell_+\}$. Es decir, si un agente declara recursos $\theta_t$, dirá que su función de utilidad es la real evaluada en lo que recibe más lo que oculta. Suponemos también que la economía de partida $\mathcal{E}$ verifica (H.1), (H.2) y (H.3). Para garantizar aquí la existencia de equilibrio en las economías virtuales basta definir como perfil permitido aquel que verifica (H.1), ya que las funciones de utilidad $U_{\theta_t}$ satisfacen (H.2) y (H.3) porque, por hipótesis, las funciones $U_t$ cumplen ambos supuestos. En esta situación intermedia obtenemos de nuevo que el comportamiento precio-aceptante y estratégico conducen a idéntico resultado. Obsérvese que esta situación intermedia recoge como caso particular el modelo planteado en el artículo de Codognato y Gabszewicz (1993). En dicho modelo hay un contínuo de agentes que se comportan estratégicamente y un contínuo de agentes que adoptan comportamiento precio-aceptante. Los primeros, que denominan oligopolistas, disponen de recursos iniciales estrictamente positivos del bien 1 y nada de los demás bienes; mientras que los últimos tienen dotaciones iniciales nulas del bien 1 y cantidades positivas de los demás bienes. Como ya se ha señalado en la introducción, bajo supuestos de unicidad de equilibrio competitivo y definiendo como estrategias las dotaciones, prueban que el conjunto de asignaciones de equilibrio Cournot-Walras coincide con el conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo. Aquí se obtiene el mismo resultado utilizando el concepto de equilibrio estratégico, pero sin restringir la estructura de las dotaciones iniciales, generalizando el conjunto de estrategias y sin suponer unicidad de equilibrio competitivo. Podría haberse considerado en esta nota que unos agentes se comportan estratégicamente y otros no, ya que introducir agentes que adoptan comportamiento precio-aceptante no alteraría el resultado, pues basta tomar $\Theta_t = \{(\omega_t, U_t)\}$ para dichos agentes.

# 6 Observaciones finales

En esta nota se ha probado que en economías contínuas el conjunto de asignaciones de equilibrio estratégico generalizado coincide con el conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo. Ello permite concluir que en economías continuas el concepto de equilibrio estratégico generalizado está bien definido y es equivalente al concepto de equilibrio estratégico. En consecuencia, existe equilibrio estratégico si y sólo si existe equilibrio competitivo. Estos resultado se han obtenido desde un planteamiento general, donde el conjunto de estrategias para un agente $t \in I$ se ha definido como cualquier $\Theta_t \subseteq \{ (\theta_t, U_{\theta_t})$, tal que $0 \leq \theta_t \leq \omega_t$ y, $U_{\theta_t} : X_t \to \mathbb{R}$ es contínua $\}$, tal que $(\omega_t, U_t) \in \Theta_t$. Esta definición general de los conjuntos de estrategias ha permitido analizar varias aplicaciones, según las estrategias concretas consideradas. Un primer caso, donde el conjunto de estrategias está formado por dotaciones y preferencias. Un segundo caso, considerando como únicas estrategias las dotaciones. Y una situación intermedia, que resulta de considerar un comportamiento estratégico consistente básicamente en dotaciones. En cualquier caso, el comportamiento precio-aceptante conduce a idéntico resultado que el comportamiento estratégico. Se ha supuesto que el espacio de mercancías es $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$, sin embargo, no es relevante en esta nota el suponer un espacio de mercancías de dimensión finita; bien podría haberse establecido el resultado para dimensión infinita, sin más que añadir la hipótesis de la uniformidad propia de las preferencias, que asegura la existencia de equilibrio competitivo para economías contínuas definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita. (Véase Khan y Yannelis (1991), cap. 4). No se supone unicidad de equilibrio competitivo, solamente se establecen supuestos que garanticen su existencia. El hecho de que pueda haber multiplicidad de equilibrios justifica la selección del mecanismo competitivo, efectuada en la sección 2 .

De los casos considerados, es el último el que recoge como caso particular el resultado obtenido por Codognato y Gabszewicz (1993). Se llega aquí a la misma equivalencia pero con un planteamiento más general; no se impone ninguna restricción concreta en la estructura de los recursos iniciales, no se supone unicidad de equilibrio competitivo y se generaliza el conjunto de estrategias; los agentes actúan estratégicamente en todos los bienes y puede comerciarse con todas las mercancias, incluso con las que no se declaran en su totalidad. En esta situación intermedia, es de señalar la importancia de restringir los conjuntos de consumo de las economías virtuales $\mathcal{E}_\theta$ a $\mathbb{R}^\ell_+$ y no considerar como conjuntos de consumo $X_t = \mathbb{R}^\ell_+ - \omega_t + \theta_t$. De haber considerado este último caso, es fácil probar que los precios de equilibrio competitivo en $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_\theta$ serían los mismos y las asignaciones de equilibrio walrasiano de $\mathcal{E}_\theta$ las correspondientes trasladadas. Concretamente, tendríamos que $(p, x)$ es equilibrio walrasiano de $\mathcal{E}$ si y solo si $(p, \bar{x})$ es quilibrio walrasiano de $\mathcal{E}_\theta$, con $\bar{x}(t) = x(t) - \omega_t + \theta_t$. Y por lo tanto, la prueba del resultado se reduciría a demostrar la compatibilidad en incentivos del mecanismo auxiliar $G$. Hagamos notar también que la definición de equilibrio estratégico la establecemos siguiendo la idea de la noción de equilibrio Cournot-Walras. No obstante, presentan algún matiz diferente. Si consideramos la situación de partida como en el trabajo de Codognato y Gabszewicz (1993), tendríamos un sólo perfil de estrategias de equilibrio Cournot-Walras y dos perfiles de estrategias de equilibrio estratégico, uno declarar las verdaderas características y otro declarar la oferta de equilibrio competitivo; en ambos casos los perfiles dan como resultado la misma asignación de equilibrio.

Se sabe que los resultados obtenidos no son ciertos en economías con un conjunto finito de agentes. Aún así, cabría esperar que el resultado de equivalencia entre asignaciones de equilibrio estratégico y equilibrio competitivo fuera asintóticamente cierto. De hecho, la idea de competencia perfecta suele asociarse a economías con un número de agentes suficientemente grande. El resultado obtenido para economías contínuas, en cualquiera de sus versiones, permite conjeturar que si consideramos secuencias de economías donde el conjunto de agentes aumenta indefinidamente, las asignaciones de equilibrio estratégico deberían converger a las asignaciones de equilibrio competitivo.

# Referencias


[1] AUMANN, R. J. (1964): "Markets with a continuum of traders." *Econometrica*, 32, 39-50.

[2] CODOGNATO, G. and GABSZEWICZ, J. J. (1991): "Cournot-Walras Equilibria in Pure Exchange Economies." CORE DP 9110.

[3] CODOGNATO, G. and GABSZEWICZ, J. J. (1993): "Cournot-Walras equilibria in markets with a continuum of traders." *Econ. Theory*, 3, 453-464.

[4] GABSZEWICZ, J. J. and VIAL, J. P. (1972): "Oligopoly "a la Cournot" in General Equilibrium Analysis." *Journal of Economic Theory*, 49, 10-32.

[5] HAMMOND, P. J. (1979): "Straightforward Individual Incentive Compatibility in Large Economies." *Review of Economics Studies*, 46, 263-282.

[6] ROBERTS, K (1980): "The Limit Points of Monopolistic Competition." *Journal of Economic Theory*, 22, 256-278.

[7] KHAN, M. Ali and YANNELIS, N. C.: *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces.* Springer Verlag, 1991.

# Capítulo II

# Algunas consideraciones sobre el Mecanismo del Veto

# 1 Introducción

Los elementos del núcleo de una economía son aquellas asignaciones que no estan vetadas por ninguna coalición de agentes. En ellas no hay incentivos para los agentes a formar coaliciones y "pactar" una redistribución de sus recursos. La formación de coaliciones presenta dificultades teóricas debidas, por ejemplo, a necesidad y coste de información, coste asociado a la propia formación de coaliciones, incompatibilidad entre distintos agentes que se niegan a cooperar unos con otros, ... Por ello, si suponemos que sólo una parte $\mathcal{S}$ del conjunto de todas las coaliciones posibles de una economía $\mathcal{E}$ son coaliciones permitidas, habremos de interesarnos por las consecuencias que este supuesto tiene a los efectos del mecanismo del veto.

El mecanismo del veto coalicional conduce a los conceptos de núcleo de una economía y, por un proceso límite, al equilibrio de Edgeworth (asignaciones que no están vetadas en ninguna de las réplicas de la economía). Si sólo se permite la participación de determinadas coaliciones en el mecanismo del veto, las coaliciones pertenecientes a un determinado subconjunto $\mathcal{S}$ del conjunto de todas las coaliciones posibles, podemos definir los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de una economía $\mathcal{E}$, que generalizan respectivamente las nociones clásicas de núcleo y equilibrio de Edgeworth.

En este trabajo se estudian distintas propiedades de lo que hemos denominado $\mathcal{S}$-Núcleo así como del correspondiente concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth. Por otra parte, el concepto de núcleo fuzzy, introducido por Aubin (1979), es también susceptible de ser estudiado en función de las posibles coaliciones permitidas. De este modo, extendemos resultados de Florenzano (1990) y Hüsseinov (1994), al mismo tiempo que obtenemos nuevas caracterizaciones del núcleo y del equilibrio de Edgeworth.

El caso de economías continuas o economías sin átomos, merece una consideración especial. En estas economías el tamaño, es decir, la medida de una coalición puede tener diferentes significados. Por ejemplo, puede ser una medida relativa del coste asociado a la formación de esa coalición, como fue sugerido por Schmeidler (1972). Por otra parte, y dado el relativo valor que puede tener la medida de una coalición, puede ser de interés considerar sólo coaliciones de idéntica medida. En el caso de economías continuas, diferentes elecciones del conjunto $\mathcal{S}$ de coaliciones admisibles, nos permite interpretar los resultados de Schmeidler (1972), Grodal (1972) y Vind (1972), en términos de $\mathcal{S}$-Núcleos. Así, podemos concluir que en estas economías es suficiente considerar el veto de coaliciones arbitrariamente pequeñas o arbitrariamente grandes. Más aún, basta considerar como permitidas a las coaliciones de cualquier tamaño dado. En términos de $\mathcal{S}$-Núcleos, esto significa que el $\mathcal{S}$-Núcleo de la economía coincide con el Núcleo, cuamdo $\mathcal{S}$ es el conjunto de las coaliciones pequeñas (de tamaño menor que $\varepsilon$), o es el conjunto de las coaliciones grandes o el de las coaliciones de una medida prefijada.

Por otra parte, los resultados anteriores ponen de manidiesto que, por coincidir el $\mathcal{S}$-Núcleo y el Núcleo, los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no pueden ser manipulados por las coaliciones pertenecientes a $\mathcal{S}$. En particular, en estas economías perfectamente competitivas, el veto de las coaliciones pequeñas elimina los estados que no son de equilibrio.

En el caso en que el espacio de mercancías es de dimensión infinita, el teorema de Liapunov no es válido y, como consecuencia, los resultados citados de Schmeidler, Grodal y Vind no pueden ser aplicados como en el caso finito-dimensional.

Ostroy y Zame (1994) ponen de manifiesto que, en general, el problema de la competencia perfecta no se resuelve al considerar un continuo de agentes pues, aún siendo así, depende de lo ellos denominan "espesura" o "grosor" de la economía. Cabe preguntarse si, como en el caso finito-dimensional, el veto de las coaliciones pequeñas elimina los estados no competitivos en las denominadas por Ostroy y Zame "economías perfectamente competitivas" (economías "espesas", física o económicamente), y también si este es un test que caracteriza a dichas economías. Es decir, si el resultado no es cierto en economías continuas que no son "espesas" (thin market economies).

El resto de esta nota se desarrolla como sigue. En la sección 2 se define el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo en un marco general y se deducen algunas propiedades. La sección 3 contiene resultados conocidos interpretados en términos de $\mathcal{S}$-Núcleos. En la sección 4, siguiendo García-Cutrín y Hervés (1993), se establece un planteamiento discreto de una economía continua de $n$ tipos, lo cual nos va a permitir interpretar cuales son las coaliciones suficientes para vetar los estados no competitivos en economías de $n$ agentes.

En la sección 5 se introducen los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $r\mathcal{S}$-Núcleo en economías réplicas, estableciendo, como interpretación de un resultado clásico (Hansen(1969)),que para conseguir las asignaciones walrasianas de una economía basta considerar el veto de $nr + 1$ coaliciones en cada réplica. En la sección 6 se definen las nociones de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy y $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy con coeficientes racionales. Se prueba que, si las preferencias son continuas, las dos últimas nociones son equivalentes. Se obtiene, tanto en el caso finito como infinito-dimensional una caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de una economía mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy correspondiente. Este resultado generaliza el de la conocida equivalencia entre Equilibrio de Edgeworth y Núcleo fuzzy, permitiendo caracterizar el concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth sin recurrir a las economías réplicas. Además se prueba que es suficiente el veto ponderado de la coalición formada por todos los agentes para conseguir las asignaciones pertenecientes al núcleo fuzzy o los equilibrios de Edgeworth de una economía. En la sección 7 se obtienen resultados que relacionan el $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía finita con el $\mathcal{S}_c$-Núcleo de una economía continua. Se obtiene también la equivalencia entre las asignaciones de equilibrio de walrasiano y el núcleo fuzzy, tanto para el caso en que el espacio de mercancías es de dimensión finita como para el caso de dimensión infinita. Estos resultados generalizan otros de Hüsseinov

(1994), que suponen convexidad, monotonía y continuidad, y además el espacio de mercancías es finito-dimensional. Por último, la sección 8 contiene comentarios y observaciones finales.

# 2 $\mathcal{S}$-Núcleos: Definición y propiedades

Sea la economía de intercambio $\mathcal{E} = ((I, \mathcal{A}, \mu), \omega(t), \preceq_t, t \in I)$ definida sobre el espacio de mercancías $E$. $(I, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita, donde $I$ es el conjunto de agentes y $\mu$ una medida sobre la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su dotación inicial $\omega(t) \in E_+$ y su relación de preferencias $\preceq_t$ sobre su conjunto de consumo $E_+$. La función $\omega : I \to E_+$, que asigna a cada agente sus dotaciones iniciales, es $\mu$-integrable. La función $\preceq$, que asigna a cada agente su relación de prefrencias es medible. Una coalición es un conjunto medible $S \subset I$ tal que $\mu(S) > 0$. Dado $S \in \mathcal{A}$, $\mu(S)$ representa el tamaño de la coalición $S$.

Un estado de la economía es una aplicación $f : I \to E_+$ $\mu$-integrable. Un estado $f$ es admisible si $\int_I f d\mu \leq \int_I \omega d\mu$.

Se dice que la coalición $S$ veta a $f$ via $g$ si se verifica lo siguiente
*i.* $\int_S g d\mu \leq \int_S \omega d\mu$
*ii.* $g(t) \succ_t f(t)$ para casi todo $t \in S$.

Un estado admisible $f$ pertenece al núcleo de la economía si no está vetado por ninguna coalición $S \in \mathcal{A}$. Denotamos por $N(\mathcal{E})$ el conjunto de los estados del núcleo de la economía $\mathcal{E}$.

**Observación.** Nótese que en el caso en que el conjunto de agentes es finito, $I = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A}$ es el conjunto de las partes de $I$, que denotamos por $\mathcal{P}(I)$, y $\mu$ es la medida de contar, y por tanto, $\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^n f_i$. El tamaño de una coalición $S \in \mathcal{P}(I)$ viene dado por el cardinal del conjunto $S$, esto es, $\mu(S) = card(S)$. Si nos referimos a una economía sin átomos, el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$ sería un espacio sin átomos, por ejemplo, $I = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ los subconjuntos medibles de $I$ y $\mu$ la medida de Lebesgue. Podemos también considerar economías mixtas, en cuyo caso $I = [0, 1] \bigcup \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A}$ es el conjunto formado por los subconjuntos medibles del intervalo real $[0, 1]$ y por el conjunto de las partes de $\{1, \ldots, n\}$, y $\mu$ es la medida producto.

Puede ocurrir que algunos grupos de agentes tengan dificultades para constituir una coalición (por ejemplo altos costes, falta de comunicación, incompatibilidad de los agentes, ...) y pactar una redistribución de sus recursos. Teniendo esto en cuenta, podemos considerar que no siempre es posible la formación de todas las coaliciones en una economía sino que sólo algunas pueden realmente formarse. De este modo, sólo nos interesaría el veto de algunas coaliciones y no de todas, es decir, sólo estaríamos interesados en el poder de veto de aquellas coaliciones que puedan realmente constituirse en la economía. Esta idea conduce a introducir el concepto que denominamos $\mathcal{S}$-Núcleo, siendo $\mathcal{S}$ un conjunto que ha sido seleccionado del conjunto total de coaliciones. Nos referiremos a $\mathcal{S}$ como conjunto de coaliciones permitidas. Así, un estado admisible pertenece al $\mathcal{S}$-Núcleo de la economía $\mathcal{E}$ si no está vetado por ninguna de las coaliciones permitidas. A continuación formalizamos el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo.

**Definición** 2.1 *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, con $\mu(S) > 0$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Decimos que un estado admisible $f$ de la economía $\mathcal{E}$ es un elemento del $\mathcal{S}$-Núcleo de $\mathcal{E}$, y denotamos $f \in \mathcal{S}\text{-}N(\mathcal{E})$ si no está vetado por ninguna coalición $S \in \mathcal{S}$.*

Nótese que el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo generaliza la noción de núcleo de una economía. Basta tomar $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ para obtener la definición de núcleo que se acostumbra a leer en la literatura económica.

De la definición establecida se deducen fácilmente las siguientes propiedades del $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía de intercambio:

(P.1) Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$. Entonces $\mathcal{S}_2\text{-}N(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}_1\text{-}N(\mathcal{E})$ . En particular, $N(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}\text{-}N(\mathcal{E})$ cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

(P.2) $\mathcal{S}_1\text{-}N(\mathcal{E}) \cap \mathcal{S}_2\text{-}N(\mathcal{E}) = (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)\text{-}N(\mathcal{E})$ , cualesquiera que sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{A}$.

De la propiedad (P.1) se deduce que las condiciones que garantizan la existencia de núcleo de una economía son suficientes para garantizar la existencia de $\mathcal{S}$-Núcleo, cualquiera que sea el conjunto $\mathcal{S}$ de coaliciones permitidas. De (P.2) se deduce que si $\mathcal{A} = \bigcup_i \mathcal{S}_i$, entonces $\bigcap_i(\mathcal{S}_i\text{-}N(\mathcal{E})\ ) = N(\mathcal{E})$ . Esto es, si $\mathcal{P}$ es una partición cualquiera del conjunto total de coaliciones $\mathcal{A}$, y consideramos los $\mathcal{S}$-Núcleos, con $\mathcal{S} \in \mathcal{P}$, entonces los elementos del Núcleo de la economía son aquellos que están en la intersección de estos $\mathcal{S}$-Núcleos. En particular, la intersección de los $\mathcal{S}$-Núcleos de una partición es independiente de la partición elegida.

# 3 Equivalencia entre Núcleo y $\mathcal{S}$-Núcleo en una economía sin átomos

Teniendo en cuenta las dificultades que pueden presentarse en la formación de algunas coaliciones, sería de interés establecer condiciones sobre $\mathcal{S} \neq \mathcal{A}$, y sobre la economía $\mathcal{E}$ que garanticen la equivalencia $\mathcal{S}\text{-}N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$ . Sería también de interés analizar si resultados que hacen referencia al núcleo de una economía, por ejemplo la equivalencia Core-Walras, siguen siendo ciertos si se restringe el conjunto de coaliciones permitidas. A continuación se establecen ejemplos que hacen referencia a este tipo de cuestiones.

Consideremos una economía sin átomos $\mathcal{E} = ((I, \mathcal{A}, \mu), \omega(t), \preceq_t, t \in I)$ definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$. Es decir, el espacio $(I, \mathcal{A}, \mu)$, que representa el conjunto de agentes, es un espacio de medida sin átomos. Por ejemplo, $I$ es el intervalo real $[0,1]$, $\mathcal{A}$ es la $\sigma$-álgebra formada por los subconjuntos $\mu$-medibles de $I$, y $\mu$ la medida de Lebesgue.

Los siguientes teoremas son consecuencia de los elegantes resultados de Schmeidler (1972), Grodal (1972) y Vind (1972).

**Teorema** 3.1 *Sea $\nu$ una medida finita sobre $\mathcal{A}$ absolutamente continua respecto a $\mu$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se verifica que $\mathcal{S}_\varepsilon^\nu$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$, siendo $\mathcal{S}_\varepsilon^\nu$ el conjunto de coaliciones $S \in \mathcal{A}$ tales que $\nu(S) \leq \varepsilon$.*

*Demostración.* Véase Schmeidler.

Q.E.D.

**Observación.** Dada una coalición $S$, puede interpretarse que $\nu(S)$ representa el coste necesario para la formación de la coalición $S$. Así, podemos conluir que para obtener las asignaciones del núcleo de una economía sin átomos es suficiente considerar el veto de aquellas coaliciones cuya formación requiera un coste de información y comunicación arbitrariamente pequeño.

**Corolario** 3.1 *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se verifica que $\mathcal{S}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E})$ $=N(\mathcal{E})$, siendo $\mathcal{S}_\varepsilon$ el conjunto de coaliciones $S \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(S) = \varepsilon$.*

*Demostración.* Basta tomar $\nu = \mu$ en la prueba de Schmeidler.

Q.E.D.

**Observaciones.** El resultado de Schmeidler es realmente más de lo que dice. De la prueba se deduce que si una asignación está vetada por una coalición $S$ vía $g$, entonces está vetada por una coalición arbitrariamente pequeña vía la misma asignación $g$. Esto se obtiene como consecuencia del teorema de Liapunov. Cabe preguntarse si el resultado sigue siendo cierto en el caso infinito-dimensional. Se sabe que si el espacio de mercancías es de dimensión infinita no vale la versión fuerte del resultado de Schmeidler. El teorema de Liapunov no se mantiene en dimensión infinita. Versiones aproximadas del teorema de convexidad de Liapunov, a veces válidas en el caso infinito-dimensional, no funcionan para esta situación. En efecto, C. Núñez (1991) prueba que en economías continuas con un espacio de mercancías de dimensión infinita se tiene que $\mathcal{S}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) \neq N(\mathcal{E})$. Concretamente, construye una economía donde hay una asignación que está vetada por la coalición de todos los agentes vía una asignación $g$ y ninguna otra coalición veta dicha asignación vía la misma $g$. Sin embargo, esto no impide el que coaliciones pequeñas veten vía otro reparto distinto de $g$. De hecho, la conjetura que planteamos es que, en economías sin átomos, el resultado que enuncia Schmeidler siga siendo cierto en el caso infinito-dimensional, a pesar de que no se mantenga en su versión fuerte. Establecemos esta conjetura como un problema abierto.

El resultado de Grodal (1972) permite restringir aún más el conjunto de coaliciones permitidas, manteniendo la equivalencia anterior.

**Teorema** 3.2 *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *se verifica* $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$, *siendo* $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ *el conjunto de coaliciones* $S \in \mathcal{A}$ *tales que* $S = \cup_{i=1}^{\ell+1} S_i$, *con* $diam(S_i) \leq \varepsilon$ *y* $\mu(S) = \varepsilon$. *Además si las preferencias son débilmente monótonas* $\ell + 1$ *puede sustituirse por* $\ell$.

Suponiendo hipótesis habituales sobre las preferencias y utilizando lo establecido por Grodal, se deduce de Vind (1972) un resultado de equivalencia más general.

**Teorema** 3.3 *Supongamos que para casi todo* $t \in I$ *las preferencias* $\succ_t$ *son continuas, monótonas, y medibles en el sentido que el conjunto* $\{t \in I | x \succ_t y\} \in \mathcal{A}$, *cualesquiera que sean* $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$. *Entonces para cada* $\varepsilon$, *tal que* $0 < \varepsilon < 1$, *se verifica* $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_\varepsilon^*$-$N(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$ , *siendo* $\mathcal{S}_\varepsilon^*$ *el conjunto de coaliciones* $S \in \mathcal{A}$ *tales que* $S = \cup_{i=1}^{\ell} S_i$, *con* $diam(S_i) \leq \varepsilon$ *y* $\mu(S) = \varepsilon$

Podemos, por tanto, concluir que las asignaciones del núcleo de una economía sin átomos vienen caracterizadas por aquellas asignaciones que no están vetadas por coaliciones arbitrariamente pequeñas(teorema 3.1). Más aún, si consideramos una economia continua, donde sólo distinguimos un número finito de tipos de agentes, y cada tipo $i$ viene representado por un subintervalo $I_i$ del intervalo real $[0, 1]$, entonces, basta considerar coaliciones arbitrariamente pequeñas formadas por $\ell$ tipos de agentes, siendo $\ell$ el número de los diferentes bienes que se intercambian en la economía (teorema 3.2). Por último, del teorema 3.3 se deduce que para conseguir la optimalidad de Pareto y la equivalencia Core-Walras es suficiente el veto de coaliciones constituidas por agentes de, a lo sumo, $\ell$ tipos y de medida $\bar{\varepsilon}$, con $0 < \bar{\varepsilon} < 1$. En particular, basta tener en cuenta la formación de coaliciones de medida tan pequeña o tan grande como se quiera.

Obsérvese que el marco teórico de $\mathcal{S}$-Núcleos ha permitido incluir los resultados de Schmeidler, Grodal y Vind en un mismo contexto. Son resultados de equivalencia entre $\mathcal{S}$-Núcleos y Núcleo de una economía sin átomos. Muestran que, en este caso, no es necesario considerar el veto de todas las coaliciones para obtener los estados del Núcleo. Concretamente, basta considerar la formación de las coaliciones arbitrariamente pequeñas.

# 4 Economías continuas de $n$ tipos de agentes y economías discretas.

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}_c$ con un continuo de agentes, representados por el intervalo real $I = [0, 1]$, y definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. En la economía $\mathcal{E}_c$ sólo se distingue un número finito $n$ de agentes distintos. Así, el conjunto de agentes $I$ está dividido en $n$ subintervalos disjuntos, cada uno de los cuales representa un tipo de agente. Esto es, $I = \cup_{i=1}^n I_i$, donde $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, si $i \neq n$, $I_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$. Cada consumidor $t \in I$ se caracteriza por su conjunto de consumo $\mathbb{R}_+^\ell$, sus recursos iniciales $\omega(t) = \omega_i$ para cada $t \in I_i$, y su relación de preferencias $\succeq_t = \succeq_i$ para todo $t \in I_i$, siendo $I_i$ el conjunto de agentes de tipo $i$. Una asignación $f : I \to \mathbb{R}_+^\ell$ se dice factible si $\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)\omega_i$, donde $\mu$ denota la medida de Lebesgue sobre los subconjuntos medibles de $[0, 1]$.

Siguiendo García-Cutrín y Hervés (1993), podemos interpretar esta economía continua $\mathcal{E}_c$ como una economía con $n$ agentes donde el agente $i$ representa infinitos agente idénticos. También podemos interpretar $\mathcal{E}_c$ como una economía con $n$ agentes no homogéneos, donde la influencia relativa del agente $i$ viene dada por la medida $\mu(I_i)$ del subintervalo $I_i$ que representa el tipo $i$. Para ello, asociamos a la economía $\mathcal{E}_c$ una economía discreta $\mathcal{E}_n$ con $n$ agentes, donde cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $\mathbb{R}_+^\ell$, sus dotaciones iniciales $\omega_i$ y su relación de preferencias $\succeq_i$. De este modo, una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ puede interpretarse como una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$, donde $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Recíprocamente, una asignación $x$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$, donde $f$ es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.

Para cada $r$ entero positivo, definimos la $r$-réplica de la economía $\mathcal{E}_n$, que denotamos por $r\mathcal{E}_n$, como una nueva economía con $rn$ agentes indiciados por $ij$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, tal que cada consumidor $ij$ viene caracterizado por recursos $\omega_{ij} = \omega_i$ y preferencias $\succeq_{ij} = \succeq_i$. Cada asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $rx = (x_{11}, \ldots, x_{1r}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nr})$ para cada economía réplica $r\mathcal{E}_n$ , siendo $x_{ij} = x_i$, para todo $j = 1, \ldots, r$ y para todo $i = 1, \ldots, n$. Tales asignaciones se denominan asignaciones de igual tratamiento en $r\mathcal{E}_n$ . Denotemos por $N'(r\mathcal{E}_n)$ el conjunto de asignaciones $x$ en $\mathcal{E}_n$, tales que $rx \in N(r\mathcal{E}_n)$.

**Obsrvación.** Recordar que si las preferncias son convexas se verifica que si $x \in N(r\mathcal{E}_n)$, entonces $\overline{x} \in N'(r\mathcal{E}_n)$, con $\overline{x}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r x_{ij}$. Si las preferencias son estrictamente convexas, entonces $N(r\mathcal{E}_n) \equiv N'(r\mathcal{E}_n)$.

Un equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $(x_1, \ldots, x_n)$ que pertenece al núcleo de cualquier réplica. Denotemos por $E(\mathcal{E}_n)$ el conjunto de asignaciones de equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$. Esto es, $E(\mathcal{E}_n) = \bigcap_{r \geq 1} N'(r\mathcal{E}_n)$.

Para cada número real $\varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 1$, sea $\mathcal{S}_\varepsilon^c$ el conjunto de coaliciones $S \subset [0, 1]$ tales que $\mu(S) = \varepsilon$, y $card\{i \in \{1, \ldots, n\} | \mu(I_i \cap S) > 0\} = \ell$, si $n > \ell$. Como consecuencia de los resultados en García-Cutrín y Hervés (1993) y de los resultados establecidos en la sección anterior obtenemos la siguiente equivalencia.

**Teorema** 4.1 *Supongamos que las preferencias* $\succ_i$ *son continuas, convexas y monótonas. Entonces, sea cual sea* $\varepsilon$, *con* $0 < \varepsilon < 1$, *se verifica que* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *pertenece a* $E(\mathcal{E}_n)$ *si y sólo si* $f$ *pertenece a* $\mathcal{S}^c_\varepsilon$*–*$N(\mathcal{E}_c)$, *siendo* $f(t) = x_i$, *si* $t \in I_i$.

Por tanto, se tiene que para conseguir la equivalencia Core-Walras en $\mathcal{E}_c$ es suficiente considerar el veto de las coaliciones en $\mathcal{S}^c_\varepsilon$. Así, los precios de equilibrio competitivo vienen caracterizados como aquellos que no pueden ser manipulados por "pequeños" grupos de agentes, lo cual es una justifición más del supuesto de competencia perfecta en economías continuas $\mathcal{E}_c$. Del mismo modo, para conseguir los equilibrios de Edgeworth para una economía $\mathcal{E}_n$ con un número finito de agentes, no es necesario el veto de cualquier coalición en la economía continua de $n$ tipos $\mathcal{E}_c$, sino que es suficiente el veto de coaliciones de medida $\bar{\varepsilon}$. En particular, es suficiente el veto de coaliciones arbitrariamente pequeñas o arbitrariamente grandes. Además, si el número de agentes en $\mathcal{E}_n$ es mayor que el número de bienes $\ell$, entonces basta considerar el veto de coaliciones formadas por $\ell$ tipos de agentes.

Nótese, por tanto, que los resultados de Grodal y Vind tienen un interés especial en el caso de economías continuas con un número finito de tipos de agentes. De hecho, permiten concluir que, en esta situación, basta considerar el veto de aquellas coaliciones no sólo arbitrariamente pequeñas, sino además formadas por agentes de tantos tipos como bienes se intercambien en la economía. Esto no añade nada nuevo al resultado de Schmeidler si el número de tipos de agentes no supera el número de bienes. Nótese la clara conexión entre este planteamiento y la idea de que para que exista competencia perfecta en una economía debe haber muchos más agentes que mercancías.

# 5 $\mathcal{S}$-Núcleos en economías réplicas.

Nuestro objetivo ahora es introducir la noción de $\mathcal{S}$-Núcleos, o núcleos donde sólo se considere el veto de algunas coaliciones, en economías réplicas y ver cómo se relaciona con los conceptos clásicos ya citados. Para ello, establecemos la siguiente notación. Sea $\mathcal{P}(I_n)$ el conjunto formado por los subconjuntos no vacíos de $I_n$, es decir, el conjunto formado por todas las coaliciones en la economía de $n$ agentes $\mathcal{E}_n$ . Denotemos por $rI_n$ el conjunto de agentes en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ . Dada una coalición $S$ en $\mathcal{E}_n$ , denotamos por $r(S)$ el conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ formadas por $r_i$ agentes de tipo $i$, con $0 < r_i \leq r$ si $i \in S$ y $r_i = 0$ si $i \notin S$. Asociemos a cada conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ en $\mathcal{E}_n$ , el conjunto de coaliciones $r(\mathcal{S})$ en $r\mathcal{E}_n$ definido por $r(\mathcal{S}) = \cup_{S \in \mathcal{S}} r(S)$. Esto es, $r(\mathcal{S})$ es el siguiente conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$

$$r(\mathcal{S}) = \left\{ S^r \subset rI_n | \text{ existen } S \in \mathcal{S} \text{ y } J \subset \{1, \ldots, r\} \text{ tal que } S^r = \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in J}} \{ij\} \right\}$$

**Definición** 5.1 *Decimos que una asignación factible* $x$ *en la economía réplica* $r\mathcal{E}_n$ *es un elemento del* $\mathcal{S}$*-Núcleo de* $r\mathcal{E}_n$ *, y denotamos* $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$*, si no está vetada por ninguna coalición perteneciente a* $r(\mathcal{S})$.

Nótese que si $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, entonces para cada $ij$, $ij'$ se verifica que $x_{ij} \sim x_{ij'}$ si las preferencias son convexas, y $x_{ij} = x_{ij'}$ si las preferencias son estrictamente convexas. Para restringir más las coaliciones permitidas en las economías réplicas establecemos una selección arbitraria en $r(\mathcal{S})$. Es decir, dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ en $\mathcal{E}_n$ , consideremos para cada $r$ un conjunto de coaliciones no vacío $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$. Esto conduce a un concepto más general que el anterior.

**Definición** 5.2 *Sea una sucesión* $(r\mathcal{S})$ *de coaliciones permitidas en las economías réplicas* $r\mathcal{E}_n$ *, tal que* $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$ *para cada* $r \in \mathbb{N}$*. Decimos que una asignación factible* $x$ *en la economía réplica* $r\mathcal{E}_n$ *es un elemento del* $r\mathcal{S}$*-Núcleo de* $r\mathcal{E}_n$ *, y denotamos* $x \in r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$*, si no está vetada por ninguna coalición perteneciente a* $r\mathcal{S}$.

**Observaciones.** Obsérvese que si la selección elegida verifica $r\mathcal{S} \subset (r+1)\mathcal{S}$, entonces $(r+1)\mathcal{S}\text{-}N((r+1)\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$. Obsérvese también que para cada $r$ entero positivo se verifica $N(r\mathcal{E}_n) \subset r(\mathcal{S})\text{-}N(r\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, sea cual sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ y sea cual sea la selección $(r\mathcal{S})$. Por otra parte, tanto en la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$ como en la noción de $r\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$ , la sucesión de coaliciones permitidas en las economías réplicas verifica lo siguiente. Si un agente de tipo $i$ no formó coalición con un agente de tipo $i'$ en la economía $\mathcal{E}_n$ , entonces un agente $ij$ no formará coalición con un agente $i'j'$ en la economía $r\mathcal{E}_n$, cualquiera que sea $r$. Por el contrario, si agentes de tipos $i, i'$ diferentes forman parte de una coalición permitida en $\mathcal{E}_n$ , entonces en cualquier economía réplica $r\mathcal{E}_n$ se permitirán las coaliciones que incluyan al menos un agente representativo de tales tipos.

Es sabida la equivalencia entre el equilibrio de Edgeworth y las asignaciones de equilibrio walrasiano en una economía con preferencias ordenadas y definida sobre un espacio de mercancías de dimensión finita (Debreu y Scarf (1963)). Esto es, las asignaciones walrasianas de una economía son elementos del núcleo (versión fuerte del primer teorema del bienestar), y "en el límite" sólo las asignaciones walrasianas pertenecen al núcleo. Se formaliza así la idea de Edgeworth de que cuantos más agentes intervengan en la economía más cerca está el núcleo de los estados de equilibrio walrasiano.

En la sección anterior hemos establecido que para conseguir los equilibrios de Edgeworth de una economía discreta $\mathcal{E}_n$ no es necesario considerar el veto de todas las coaliciones en la economía continua $\mathcal{E}_c$ de $n$ tipos. En Hansen (1969) se prueba un resultado que nos permite concluir que para conseguir las asignaciones de equilibrio walrasiano de $\mathcal{E}_n$ podemos restringir el conjunto de coaliciones permitidas en las economías réplicas a aquellas coaliciones formadas por todos los agentes de un tipo y todos menos uno de los demás junto con la coalición de todos los agentes. Es decir, basta considerar el veto de $nr+1$ coaliciones en cada economía $r\mathcal{E}_n$ .

**Teorema** 5.1 *Supongamos que en la economía $\mathcal{E}_n$ se verifica que para todo agente $i \in \{1,\ldots,n\}$ las preferencias son monótonas, estrictamente convexas, $\omega_i \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$, y el conjunto $\{x'|x' \succeq_i x\}$ tiene un único hiperplano soporte en $x$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Entonces se tiene lo siguiente. El conjunto de asignaciones walrasianas de $\mathcal{E}_n$ pertenecientes a $\mathbb{R}^{n\ell}_{++}$ coincide con $\bigcap_{r\geq 1} r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, siendo $r\mathcal{S} = \left\{S^r \in rI_n | S^r = \left(\bigcup_{j=1}^{r}\{kj\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{r-1} \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\{ij\}\right)\right\} \bigcup rI_n$.*

Por tanto, si $x \in \mathbb{R}^{n\ell}_{++}$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto y $x \in r\mathcal{S}'\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$ para todo $r$ entero positivo, con $r\mathcal{S}' = r\mathcal{S} \setminus rI_n$, entonces existe un sistema de precios que descentraliza $x$, es decir, esxiste $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ tal que $(p,x)$ es equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}_n$ . Así, bajo las hipótesis de este teorema y teniendo en cuenta el resultado de Debreu y Scarf (1963), podemos concluir que $E(\mathcal{E}_n) = \bigcap_{r\geq 1} r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$. Esto es, es suficiente considerar el veto de las coaliciones en $r\mathcal{S}$, en las economías réplicas $r\mathcal{E}_n$ , para conseguir los equilibrios de Edgeworth en $\mathcal{E}_n$ que pertenecen a $\mathbb{R}^{n\ell}_{++}$.

# 6 Definición y caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth: $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy

La misma idea de restringir el conjunto de coaliciones permitidas, conduce a introducir la noción de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, generalizando el concepto de Equilibrio de Edgeworth. Para ello, consideramos la economía de $n$ agentes $\mathcal{E}_n$ y un subconjunto $\mathcal{S}$ del conjunto total de coaliciones. Para cada $r$ entero positivo, sea $r(\mathcal{S})$ el conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ definido en la sección anterior.

**Definición** 6.1 *Un $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $x = (x_1,\ldots,x_n)$ tal que $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, para todo $r \in \mathbb{N}$.*

Para poder restringir más el conjunto de coaliciones permitidas, introducimos el concepto de equilibrio de Edgeworth asociado a una selección $(r\mathcal{S})$ de $(r(\mathcal{S}))$.

**Definición** 6.2 *Sea una sucesión $(r\mathcal{S})$ de coaliciones permitidas en las economías réplicas $r\mathcal{E}_n$ , tal que $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Decimos entonces que un $r\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $x = (x_1,\ldots,x_n)$ tal que $x \in r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$para todo $r \in \mathbb{N}$.*

Denotemos por $\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$ el conjunto de los $\mathcal{S}$-Equilibrios de Edgeworth y por $r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$ el conjunto de los $r\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$ . Nótese que $E(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones permitidas $\mathcal{S}$ y cualquiera que sea la selección $(r\mathcal{S})$.

Aubin (1979) introduce el concepto de Núcleo fuzzy, formalizando la idea de aumentar el conjunto de coaliciones permitiendo que los agentes puedan fraccionarse, en el sentido de contribuir con parte de sus recursos. Si se considera que los agentes pueden participar con una fracción de sus recursos y si las preferencias son convexas, entonces un equilibrio de Edgeworth puede definirse como una asignación factible que no es vetada por ninguna coalición con un ratio racional de participación.

Decimos que una asignación factible $x$ pertenece al Núcleo fuzzy (resp. Núcleo fuzzy con coeficientes racionales) de $\mathcal{E}_n$ , y denotamos $x \in NF(\mathcal{E}_n)$ , si $x$ no está $f$-vetada (resp. $f$-vetada en $\mathbb{Q}$).

Una asignación $x$ está $f$-vetada (resp.$f$-vetada en $\mathbb{Q}$) por la coalición S vía $y$ si existen $\alpha_s \in [0,1], \alpha_s \neq 0$ $(resp. \alpha_s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \alpha_s \neq 0)$, para cada $s \in S$, tales que

*i.* $\sum_{s \in S} \alpha_s y_s = \sum_{s \in S} \alpha_s \omega_s$.
*ii.* $y_s \succ_s x_s$ para todo $s \in S$.

Considerando una vez más un subconjunto $\mathcal{S}$ del conjunto total de coaliciones, introducimos el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy, que generaliza la noción de Núcleo fuzzy.

**Definición** 6.3 *Se dice que la asignación $x$ está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada si está $f$-vetada por alguna coalición $S \in \mathcal{S}$. Las asignaciones que no están $\mathcal{S}$-fuzzy vetadas constituyen el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy, que denotamos por $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$ .*

Nótese que cualquiera que sea el conjuto de coaliciones $\mathcal{S}$ se verifica que $NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$N(\mathcal{E}_n)$. Además, propiedades análogas a las citadas para $\mathcal{S}$-Núcleos se obtienen para $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy. La definición de núcleo fuzzy establecida anteriormente equivale a la introducida por Aubin (1979). Sin embargo, exigimos que los $\alpha_i$ sean estrictamente positivos para todo agente en la coalición, para que la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy sea más interesante.

**Definición** 6.4 *Se dice que la asignación $x$ está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada en $\mathbb{Q}$si está $f$-vetada en $\mathbb{Q}$por alguna coalición $S \in \mathcal{S}$. Las asignaciones que no están $\mathcal{S}$-fuzzy vetadas en $\mathbb{Q}$constituyen el $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$–Núcleo fuzzy, que denotamos por $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$–$NF(\mathcal{E}_n)$.*

A continuación se prueba que si las preferencias de los agentes son continuas, entonces el veto con participaciones reales es equivalente al veto con participaciones racionales. Se deduce entonces que el conjunto de asignaciones de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth coincide con el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy. Esta equivalencia permite concluir que no es necesario recurrir a economías réplicas para dar una caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth.

**Teorema** 6.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía definida sobre el espacio de mercancías $E$. Supongamos que $E$ es un e.v.t. y que los $n$ agentes que forman la economía tienen preferencias continuas sobre su conjunto de consumo $E_+$. Entonces $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-$NF(\mathcal{E})$, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$.*

*Demostración.* Obviamente se verifica que $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF$(\mathcal{E}_n)$. Para probar el recíproco, supongamos que la asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada. Entonces, existe $S \in \mathcal{S}$, y existen $y_i \in E_+$ y $\alpha_i \in (0, 1]$, para cada $i \in S$, tales que $\sum_{i \in S} \alpha_i y_i = \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$ para todo $i \in S$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_i^k = E[k\alpha_i + 1]$, donde $E[t]$ denota la parte entera del número real $t$. Sea $y_i^k = \frac{k\alpha_i}{\alpha_i^k}(y_i - \omega_i) + \omega_i \in \mathbb{R}_+^\ell$. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{k\alpha_i}{\alpha_i^k} = 1$, obtenemos que: $\lim_{k\to\infty} y_i^k = y_i$. Luego, por continuidad de las preferencias, existe $k_0$ tal que $k \geq k_0 \Rightarrow y_i^k \succ_i y_i$ para todo $i \in S$. Además, se verifica que $\sum_{i \in S} \alpha_i^k y_i^k = \sum_{i \in S} k\alpha_i(y_i - \omega_i) + \alpha_i^k \omega_i = k(\sum_{i \in S} \alpha_i y_i - \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i) + \sum_{i \in S} \alpha_i^k \omega_i = \sum_{i \in S} \alpha_i^k \omega_i$, donde $\alpha_i^k$ son enteros para todo $i \in S$. Se deduce, por tanto, que $x$ está $f$-vetada en $\mathbb{Q}$ por la coalición $S \in \mathcal{S}$. En consecuencia $x \notin \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF$(\mathcal{E}_n)$.

Q.E.D.

**Corolario** 6.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía en las condiciones del teorema 6.1. Para cada conjunto arbitrario de coaliciones $\mathcal{S}$ se verifica lo siguiente. Existe una selección $r\mathcal{S}$ de $r(\mathcal{S})$ tal que, si $x \in r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$, entonces $x \in \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$. Si además las preferencias son convexas se verifica que si una asignación $x \in \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$, entonces $x \in r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$. En particular, $\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}) = \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$.*

*Demostración.* Supongamos que la asignación $x$ está $f$-vetada por una coalición $S \in \mathcal{S}$. Entonces, por el teorema 6.1, existen $\alpha_i^k \in \mathbb{N}$, para cada $i \in S$, tales que la coalición formada por $\alpha_i^k$ agentes de tipo $i$ veta a $(x_1, \ldots, x_1; \ldots; x_n, \ldots, x_n)$ en la economía $k\mathcal{E}$, con $k \geq k_0$. Recíprocamente, la convexidad de las preferencias nos permite afirmar que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$, entonces existe $S \in \mathcal{S}$ y existen $r_i$, $y_i$, para cada $i \in S$, tales que $\sum_{i \in S} r_i y_i = \sum_{i \in S} r_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S$. Luego, $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$.

Q.E.D.

Este resultado generaliza la equivalencia entre los Equilibrios de Edgeworth y el Núcleo fuzzy, tanto en el caso finito como infinito-dimensional. Como hemos señalado anteriormente, ello permite concluir que no es necesario recurrir a las réplicas de una economía para dar una caracterización de los $\mathcal{S}$-Equilibrios de Edgeworth, pues equivalen al $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy correspondiente. Esta conclusión es importante, dado que en ocasiones hay dificultades para definir economías réplicas, como sucede, por ejemplo, en el caso de preferencias interdependintes.

En la sección 3 hemos obtenido resultados de equivalencia entre núcleo y $\mathcal{S}$-Núcleo de economías sin átomos, para determinados conjuntos de coaliciones $\mathcal{S}$, distintos del total. Estos resultados, junto con la interpretación discreta de una economía continua de $n$ tipos, nos permite establecer la siguiente equivalencia entre núcleo fuzzy y $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy de una economía $\mathcal{E}_n$ con un núnero finito $n$ de agentes.

**Teorema** 6.2 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con $n$ agentes y definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$. Supongamos que las preferencias de los agentes son continuas, monótonas y convexas. Entonces $NF(\mathcal{E}_n) = \mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n)$ , cualquiera que sea $\mathcal{S}$ tal que $I_n \in \mathcal{S}$, siendo $I_n$ el conjunto de agentes en la economía $\mathcal{E}_n$ .*

*Demostración.* Obviamente $NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n)$ , cualquiera de sea $\mathcal{S}$. Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin NF(\mathcal{E}_n)$ . Entonces existe una coalición $S \subset I_n$ que $f$-veta $x$ vía $(y_i)_{i\in S}$. Esto es, para cada $i \in S$ existen $\alpha_i$, con $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{n}$, tales que $\sum_{i\in S} \alpha_i y_i = \sum_{i\in S} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S$. Sea $S_c \subset [0,1]$ una coalición en la economía continua $\mathcal{E}_c$ , tal que $\mu(S_c \cap I_i) = \alpha_i$. Sea $y(t) = y_i$ si $t \in S_c \cap I_i$ y sea $f(t) = x_i$ si $t \in I_i$. Se tiene entonces que la asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ está vetada por la coalición $S_c$ vía $y$. Por el resultado en Vind (1972) existe $S'_c \subset [0,1]$, con $\mu(S'_c) > \frac{n-1}{n}$, tal que $S'_c$ veta $f$. Por convexidad de las preferencias, se deduce que existe $(y'_i)_{i=1}^n$, tal que $y'_i \succ_i x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\sum_{i=1}^n \mu(S'_c \cap I_i) y'_i = \sum_{i=1}^n \mu(S'_c \cap I_i)\omega_i$. Luego $I_n$ $f$-veta $x$ vía $y'$.

Q.E.D.

Este resultado permite concluir que para conseguir las asignaciones pertenecientes al núcleo fuzzy de una economía discreta $\mathcal{E}_n$ es suficiente el $f$-veto de la coalición formada por todos los agentes. Como consecuencia de ello y del corolario 6.1 se obtiene que lo mismo sucede para conseguir los Equilibrios de Edgeworth en el caso finito-dimensional.

**Corolario** 6.2 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía en las condiciones del teorema 6.3. Entonces $E(\mathcal{E}_n)$=$\mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n)$ , cualquiera que sea $\mathcal{S}$, tal que $I_n \in \mathcal{S}$.*

# 7 Una Interpretación continua de la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy: $\mathcal{S}_c$–Núcleo de una economía sin átomos y equivalencia Core-Walras

Consideremos de nuevo la economía continua $\mathcal{E}_c$ de $n$ tipos y la economia finita asociada $\mathcal{E}_n$ . Dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$ , definimos el siguiente conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_c$ en $\mathcal{E}_c$

$$\mathcal{S}_c = \{S_c \subset [0,1] \mid \text{existe } S_n \in \mathcal{S}_n, \text{ tal que } \mu(S_c \cap I_i) > 0 \Leftrightarrow i \in S_n\}$$

Recíprocamente, dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_c$ en $\mathcal{E}_c$ , definimos el siguiente conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$

$$\mathcal{S}_n = \{S_n \subset \{1,\dots,n\} \mid \text{existe } S_c \in \mathcal{S}_c,\ \text{tal que } i \in S_n \Leftrightarrow \mu(S_c \cap I_i) > 0\}$$

A continuación establecemos la equivalencia entre el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy de $\mathcal{E}_n$ y el $\mathcal{S}_c$-Núcleo de $\mathcal{E}_c$ , tanto para el caso finito como infinito-dimensional.

**Teorema** 7.1 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con $n$ agentes, definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$ (resp. sobre el retículo de Banach $E$). Supongamos que las preferencias son convexas (resp. convexas y continuas sobre $E_+$). Entonces, para cualquier conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$ se verifica lo siguiente.*

*Si la asignación $f \in \mathcal{S}_c$-$N(\mathcal{E}_c)$, entonces $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}_n$-$NF(\mathcal{E}_n)$, siendo $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$.*

*Recíprocamente, si la asignación $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}_n$-$NF(\mathcal{E}_n)$, entonces $f \in \mathcal{S}_c$-$N(\mathcal{E}_c)$, siendo $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.*

*Demostración.* Supongamos $x$, definida por $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$, está $f$-vetada por la coalición $S_n \in \mathcal{S}_n$ vía $(y_i)_{i\in S_n}$, entonces existen $\alpha_i$, con $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{n}$, tales que $\sum_{i\in S_n} \alpha_i y_i = \sum_{i\in S_n} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S_n$. Por el teorema de convexidad en Hüsseinov (1987) (resp. por el lema en García-Cutrín y Hervés (1993)), para cada $i \in S_n$ existe $T_i \subset I_i$, con $\mu(T_i) > 0$, tal que $y_i \succ f(t)$, para todo $t \in T_i \subset I_i$. Sea $\beta = \min_{i\in S_n}\{\mu(T_i)\}$. Para cada $i \in S_n$ sea $S_i \subset T_i$, con $\mu(S_i) = \beta\alpha_i$. Consideremos $S_c = \bigcup_{i\in S_n} S_i$ y definamos $y(t) = y_i$, si $t \in S_i$. Se obtiene que $\int_{S_c} y d\mu = \sum_{i\in S_n} \beta\alpha_i y_i = \sum_{i\in S_n} \beta\alpha_i\omega_i = \int_{S_c} \omega d\mu$ y además $y_i \succ_i f(t)$, para todo $t \in S_i$, para todo $i \in S_n$. Luego, la coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$ y $S_c$ veta $f$ vía $y$.

Recíprocamente, supongamos que $f$, definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$, está vetada por $S_c \in \mathcal{S}_c$. Sea $S_n = \{i \in \{1,\dots,n\} | \mu(S_c \cap I_i > 0\}$. Por convexidad de las preferencias (resp. por convexidad y continuidad), se tiene que existen $y_i \in \mathbb{R}^\ell_+$ (resp. $y_i \in E_+$), para cada $i \in S_n$, tales que $\sum_{i\in S_n} \mu(S_n \cap I_n) y_i = \sum_{i\in S_n} \mu(S_n \cap I_n)\omega_i$ y además $y_i \succ_t f(t)$, para todo $t \in S_c \cap I_i$. Por tanto, $x$ está $f$-vetada por $S_n$.

Q.E.D.

**Observaciones.** En Hüsseinov (1994) se prueba que para economías definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita y suponiendo convexidad de las preferencias se verifica que $x \in NF(\mathcal{E}_n)$ y sólo si $f \in N(\mathcal{E}_c)$, con $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$. Suponiendo además continuidad y monotonía de las preferencias, se prueba en el mismo artículo que si la asignación $f \in N(\mathcal{E}_c)$, entonces $x = (x_1,\dots,x_n) \in NF(\mathcal{E}_n)$, siendo $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Nótese que ambos resultados son casos particulares del teorema anterior. Más aún, en el caso de dimensión finita, sólo suponemos aquí convexidad de las preferencias.

Aubin (1979) prueba que toda asignación del núcleo fuzzy es una asignación walrasiana. A continuación establecemos un resultado de este tipo. Para ello, denotemos por $W(\mathcal{E})$ el conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}$.

**Teorema** 7.2 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con $n$ agentes definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Supongamos que las preferencias de los agentes son continuas, convexas y monótonas y que el vector de recursos totales $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ es estrictamente positivo. Sea $\mathcal{S}$ cualquier conjunto de coaliciones que contenga a la coalición formada por todos los agentes $I_n$. Entonces $\mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n) = W(\mathcal{E}_n)$.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta la equivalencia Core-Walras establecida en Aumann (1964) para economías con un continuo de agentes, por el teorema 7.1 se obtiene que $W(\mathcal{E}_n) \subset NF(\mathcal{E}_n)$. Luego, por el teorema 6.3, si $I_n \in \mathcal{S}$, entonces $W(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n)$ . Recíprocamente, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}\text{-}NF(\mathcal{E}_n)$ , con $I_n \in \mathcal{S}$, entonces, por el teorema 6.3 $x \in NF(\mathcal{E}_n)$. Sea $f$ la asignación en $\mathcal{E}_c$ definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$. Aplicando el teorema 7.1 se tiene que $f \in N(\mathcal{E}_c)$. Por Aumann (1964), existe un sistema de precios $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ tal que $(f, p)$ es un equilibrio competitivo en la economía continua $\mathcal{E}_c$ . Por tanto, $(x, p)$ es equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_n$ .

Q.E.D.

Nótese que, en particular, este resultado, permite concluir que bajo las hipótesis establecidas se verifica que $NF(\mathcal{E}_n) = W(\mathcal{E}_n)$, equivalencia que se obtiene en Hüsseinov (1994). Aquí hemos probado que para conseguir las asignaciones de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}_n$ es suficiente considerar el $f$-veto de la coalición formada por los $n$ agentes que hay en $\mathcal{E}_n$ . Para ello, hemos utilizado el resultado de equivalencia de Aumann entre las asignaciones del núcleo y las asignaciones walrasianas de una economía definida sobre un espacio de mercancías de dimensión finita y con un un continuo de agentes. En García-Cutrín y Hervés (1993), se prueba la equivalencia Core-Walras para economías continuas de $n$ tipos definidas sobre un retículo de Banach. Este resultado de equivalencia, junto con el teorema 7.1, nos permiten establecer hipótesis que garantizan el que las asignaciones walrasianas de una economía $\mathcal{E}$, definida sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita, sean aquellas que no están $f$-vetadas.

**Teorema** 7.3 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua con $n$ tipos de agentes, definida sobre el espacio de mercancías $E$, siendo $E$ un retículo de Banach. Supongamos que las preferencias sobre $E_+$ son convexas, estrictamente monótonas, continuas y uniformemente $\tau$-propias, con respecto a alguna topología $\tau$ sobre $E$ menos fina que la topología de la norma. Supongamos además que el total de los recursos iniciales $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)\omega_i$ es estrictamente positivo y que el intervalo ordenado $[0, \omega]$ es $\tau$-compacto. Entonces se verifica que $NF(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.*

*Demostración.* La prueba es como la del teorema 7.2, utilizando la equivalencia Core-Walras obtenida en García-Cutrín y Hervés (1993), en vez de la equivalencia Core-Walras en Aumann (1964).

Q.E.D.

# 8 Conclusiones

La definición clásica de núcleo de una economía lleva implícito el hecho de que pueda formarse cualquier coalición de agentes. Sin embargo, si se piensa, por ejemplo, en costes de información y comunicación o en incompatibilidad de agentes en la formación de coaliciones, es posible que algunas coaliciones no puedan ser consideradas. Siguiendo esta idea se han introducido los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, generalizando las nociones clásicas.

La definición de $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía se ha establecido en un marco general, en el sentido de que pueden considerarse economías finitas, continuas e incluso mixtas. Por otra parte, es de señalar que la existencia de $\mathcal{S}$-Núcleo está garantizada si el núcleo es no vacio. Se han interpretado resultados conocidos como equivalencias entre núcleo y determinados $\mathcal{S}$-Núcleos de una economía sin átomos. Por ejemplo, en economías con un continuo de agentes y definidas sobre un espacio de mercancias de dimensión finita una asignación que no está vetada por una coalición arbitrariamente pequeña está en el núcleo. Cabe plantearse si el mismo resultado es cierto en economías con un espacio de mercancías de dimensión infinita, donde la prueba de Schmeidler no sirve, pues el teorema de Liapunov no es cierto en dimensión infinita.

La misma idea de restringir el conjunto de coaliciones permitidas ha conducido al concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, obteniendo una caracterización mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy o equivalentemente, si las preferencias son continuas, mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy en $\mathbb{Q}$.

El hecho de interpretar una economía continua de $n$ tipos como una economía con un número finito de agentes, conduce a establecer equivalencias interesantes entre los conceptos introducidos, tanto en el caso de un espacio de mercancías de dimensión finita como en el caso infinito-dimensional, generalizando resultados clásicos y también resultados recientemente publicados.

Por otra parte, Florenzano (1990) prueba la existencia de equilibrio walrasiano, núcleo fuzzy y equilibrio de Edgeworth en una economía con producción y con preferencias no ordenadas, y obtiene algunos resultados de equivalencia. En este trabajo, sólo hemos considerado preferencias ordenadas. Puede ser objeto de estudios posteriores el caso de economías con externalidades.

Por último señalar que esta nota puede servir para introducir otros $\mathcal{S}$-conceptos que generalicen nociones donde intervenga la formación de coaliciones, como puede ser la noción de equilibrio de Nash fuerte o la noción de $\alpha$-núcleo, introducidas por Aumann (1959, 1964), analizando qué puede deducirse de dicha generalización.

# Referencias


[1] ALIPRANTIS, C.D., BROWN, D., BURKINSHAW, O. (1989): "Existence and Optimality of Competitive Equilibria." Springer-Verlarg. New York.

[2] AUMAN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[3] AUBIN, J.P. (1979): "Mathematical Methods of Game Economic Theory." North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford.

[4] DEBREU, G., SCARF, H. (1963): "A Limit theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review*, 4, 235-246.

[5] DIESTEL S., UHL J. (1977): "Vector Measures." Mathematical Surveys and Monographs, 15. Published by the American Mathematical Society.

[6] FLORENZANO, M. (1990): "Edgeworth Equilibria, Fuzzy Core, and Equilibria of a Production Economy without ordered Preferences." *Journal of Mathematical Analisis and Aplications*, 153, 18-36.

[7] GABSZEWICZ, J.J., SHITOVITZ, B. : "Core in perfectly competitive economies." CORE Discussion Paper 8808.

[8] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Económic Theory*, 3, 577-584.

[9] GRODAL, B. (1972): "A Second Remark on the Core of an Atomless Economy." *Económetrica*, 40, 581-583.

[10] HANSEN, T. (1969): "A note on the limit of the core of an Exchange Economy." *International Economic Review*, 10, 479-483.

[11] HÜSSEINOV, F. (1994): "Interpretation of Aubin's fuzzy coalitions and their extension." *Journal of Mathematical Economics*, 23, 459-516.

[12] KHAN, M.A., YANNELIS, N.C. (1991): "Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces." Springer-Verlag. New York.

[13] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[14] ROCKAFELLAR, T. (1970): "Convex Analysis." Princeton.

[15] RUSTICHINI A.,YANNELIS N.C. (1991): "Edgeworth's Conjecture in Economies with a Continuum of Agents and Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 20, 307-326.

[16] SCHMEIDLER, D. (1972): "A Remark on the Core of an Atomless Economy." *Económetrica*, 40, 579-580.

[17] VIND, K. (1964): "Edgeworth-Allocations in an Exchange Economy with Many Traders." *International Economic Review*, 5. 165-167.

[18] VIND, K. (1972): "A Third Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econometrica*, 40, 585-586.

# Capítulo III

# Planteamiento discreto de economías continuas

# 1 Introducción

En economías donde se supone competencia perfecta, la influencia de cada agente en la formación de precios debería ser despreciable, para poder asumir que los agentes actúan como precio-aceptantes. En el modelo clásico de $n$ agentes de Arrow-Debreu-Mackenzie, matemáticamente, no es posible suponer que la influencia de cada agente es nula. Aumann (1964) introduce un modelo de economía donde los agentes vienen representados por un espacio de medida sin átomos y el espacio de mercancías es de dimensión finita. Prueba la equivalencia Core-Walras y establece (Aumann (1966)) la existencia de equilibrio competitivo sin suponer convexidad de preferencias. El modelo de Aumann, al que nos referiremos como modelo de economías continuas, ha sido objeto de estudio para espacios de mercancías más generales. Así, son conocidos resultados de existencia de equilibrio competitivo y equivalencia Core-Walras para espacios de mercancías de dimensión infinita. (Véase, por ejemplo, Bewley (1970); Jones (1983); Kehoe, Levine, Mas-Colell y Zame (1990); Rustichini y Yannelis (1991, 1992); Ostroy y Zame (1994); entre otros).

En los modelos de economías continuas o economías sin átomos , la influencia de cada agente (o de un conjunto de agentes de medida cero) es nula, porque la integral no cambia si el comportamiento de tales agentes se modifica. La elegancia matemática de estos modelos no está libre de críticas, en el sentido de que frecuentemente la realidad económica sólo permite distiguir un número finito de participantes. García y Hervés (1993) muestran que una economía continua de $n$ tipos puede interpretarse como una economía discreta de $n$ agentes y al revés.

En este trabajo, consideramos una economía perfectamente competitiva (esto es, una economía con un continuo de agentes representados por un espacio de medida sin átomos), y planteamos diferentes modos de discretizar dicha economía, estudiando propiedades de las economías discretas asociadas y analizando algunos efectos que, la manera de discretizar correspondiente, tiene en el Mecanismo del Veto. Así, el observador o el mercado sólo percibe en la economía sin átomos un número finito de características distintas, es decir, las preferencias de los agentes que se incluyen en un mismo tipo, son estimadas como una única preferencia. Por ejemplo, el observador puede apreciar un conjunto de agentes que le parecen idénticos, con unos recursos y unas preferencias que son la media de los recursos y las preferencias de todo el conjunto de agentes. También puede estimar que un consumo es preferido a otro si es unánimemente preferido por todo el conjunto de agentes que percibe como iguales. Incluso, podría pensarse que el observador no distingue todas las preferencias individuales, pero tiene capacidad para medir el tamaño relativo de los grupos de agentes que prefieren un consumo a otro. En este caso, percibiría una preferencia que denominamos mayoritaria.

El resto del trabajo se organiza como sigue. En la sección 2, consideramos una economía sin átomos $\mathcal{E}_c$ con un continuo de características. Para cada $n$ entero positivo, definimos una economía continua $\mathcal{E}_c^n$ de $2^n$ tipos, y la economía discreta asociada $\mathcal{E}_n$ de $2^n$ agentes. En la sección 3, se establecen resultados conocidos que relacionan economías con un número finito de tipos con economías discretas, por lo que al Mecanismo del Veto y problema del equilibrio se refiere. En la sección 4, se define un planteamiento discreto la economía continua inicial, vía lo que denominamos preferencia media. Se estudian propiedades y relaciones entre el planteamiento continuo y discreto. En la sección 5, se define un segundo planteamiento discreto vía una preferencia unánime. En la sección 6, se consideran otros planteamientos discretos posibles, vía preferencias mayoritarias.

# 2 Economías continuas, economías continuas de $n$ tipos de agentes y economías finitas

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}_c = ((I, \mathcal{A}, \mu), \omega(t), \preceq_t, t \in I)$ definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$. $(I, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita, donde $I = [0,1]$ es el conjunto de agentes y $\mu$ una medida de Lebesgue sobre la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos medibles de $I$. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su dotación inicial $\omega(t) \in \mathbb{R}_+^\ell$ y su relación de preferencias $\preceq_t$ sobre su conjunto de consumo $\mathbb{R}_+^\ell$. La función $\omega : I \to \mathbb{R}_+^\ell$, que asigna a cada agente sus dotaciones iniciales, es $\mu$-integrable. La función $\preceq$, que asigna a cada agente su relación de preferencias es medible, en el sentido de que si $x, y : I \to \mathbb{R}^\ell$ son asignaciones factibles en la economía $\mathcal{E}_c$, entonces se verifica que el conjunto $\{t \in I | x(t) \succ_t y(t)\}$ es medible. (Véase Aumann (1964, 1966)). Sea $U(t, \cdot) : \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}$ una función de utilidad que representa la relación de preferencias $\succeq_t$ del agente $t \in I$.

Nuestro objetivo es considerar una economía con un continuo de tipos, proponer planteamientos discretos de la misma y ver que conclusiones se pueden obtener, respecto al mecanismo del veto, entre la economía inicial y las correspondientes economías discretas.

Para ello, para cada $n$ entero positivo, definimos la economía continua $\mathcal{E}_c^n$ de $2^n$ tipos como sigue. Consideremos que el conjunto de agentes $I$ está dividido en $2^n$ subintervalos disjuntos, cada uno de los cuales representa un tipo de agente. Esto es, $I = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_i^n$, donde $I_i^n = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, si $i \neq 2^n$, $I_{2^n}^n = \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]$. Cada consumidor $t \in I$, en la economía $\mathcal{E}_c^n$, se caracteriza por su conjunto de consumo $\mathbb{R}_+^\ell$, sus recursos iniciales $\omega(t) = \frac{1}{\mu(I_i^n)} \int_{I_i^n} \omega(t) d\mu(t)$, para cada $t \in I_i^n$, y su relación de preferencias $\succeq_{n,t} = \succeq_{n,i}$ para cada $t \in I_i^n$. Nos referiremos a $I_i^n$ como el conjunto de agentes de tipo $i$ en la economía $\mathcal{E}_c^n$.

Nótese que si $f$ es una asignación factible en $\mathcal{E}_c$, entonces $f^n$ es una asignación factible en $\mathcal{E}_c^n$, donde $f^n(t) = \frac{1}{\mu(I_i^n)}\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$, para cada $t \in I_i^n$. Además, como $\int_I \omega(t)d\mu(t) = \int_I \omega^n(t)d\mu(t)$, se tiene que $f$ es una asignación factible en $\mathcal{E}_c$ si y sólo si $f^n$ es una asignación factible en cualquier economía continua de $n$ tipos $\mathcal{E}_c^n$.

Denotemos por $\mathcal{E}_n$ la economía discreta, asociada a la economía continua $\mathcal{E}_c^n$. Esto es, $\mathcal{E}_n$ es una economía con $2^n$ agentes, caracterizados por $\omega_i^n = \omega^n(t)$, y $U_i^n = U^n(t, \cdot)$, con $t \in I_i^n$.

Nótese que una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ o la correspondiente asignación $f^n$ en $\mathcal{E}_c^n$ puede interpretarse como una asignación $x^n = (x_1, \ldots, x_{2^n})$ en $\mathcal{E}_n$, donde $x_i^n = \frac{1}{\mu(I_i^n)}\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$, equivalentemente $x_i^n = f^n(t)$, con $t \in I_i^n$. Recíprocamente, una asignación $x$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c^n$, donde $f$ es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i^n$.

# 3 Resultados previos: Economías continuas de $n$ tipos de agentes

Sea $X$ un espacio de Banach ordenado. Denotemos por $X_+$ el cono positivo de $X$. Siguiendo García y Hervés (1993), consideremos una economía de intercambio $\mathcal{E}_c$, en la que sólo se distinguen un número finito de agentes distintos. El conjunto de todos los agentes viene representado por el intervalo real $I = [0,1] = \bigcup_{i=1}^n I_i$, donde $I_i = [a_{i-1}, a_i)$, si $i \neq n$, $I_n = [a_{n-1}, 1]$, con $a_i \in \mathbb{Q}$. Cada consumidor $t \in I$ se caracteriza por su conjunto de consumo $X_+$, sus recursos iniciales $\omega(t) = \omega_i$ para cada $t \in I_i$, y su relación de preferencias $\succeq_t = \succeq_i$ para todo $t \in I_i$, siendo $I_i$ el conjunto de agentes de tipo $i$.

Una asignación es una función Bochner integrable $f : I \to X_+$. Una asignación $f$ es factible si $\int_I f(t)d\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)\omega_i$, donde $\mu$ denota la medida de Lebesgue sobre los subconjuntos medibles de $[0,1]$.

Como se muestra en el citado artículo de García y Hervés, podemos interpretar esta economía continua $\mathcal{E}_c$ como una economía con $n$ agentes donde el agente $i$ representa infinitos agentes idénticos. También podemos interpretar $\mathcal{E}_c$ como una economía con $n$ agentes no homogéneos, donde la influencia relativa del agente $i$ viene dada por la medida $\mu(I_i)$ del subintervalo $I_i$ que representa el tipo $i$. Por otra parte, si sólo se distinguen un número finito de características, nos gustaría tratar dicha economía como una economía discreta. Para ello, asociamos a la economía $\mathcal{E}_c$ una economía discreta $\mathcal{E}_n$ con $n$ agentes, donde cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_+$, sus dotaciones iniciales $\omega_i$ y su relación de preferencias $\succeq_i$. Entonces, una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ puede interpretarse como una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$, donde $x_i =$

$\dfrac{1}{\mu(I_i)} \displaystyle\int_{I_i} f d\mu$. Recíprocamente, una asignación $x$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$, donde $f$ es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$. La asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es factible en $\mathcal{E}_n$ si y sólo si $f$ es factible en $\mathcal{E}_c$.

Para cada $r$ entero positivo, definimos la $r$-réplica de la economía $\mathcal{E}_n$, que denotamos por $r\mathcal{E}_n$, como una nueva economía con $rn$ agentes indiciados por $ij$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, tal que cada consumidor $ij$ viene caracterizado por recursos $\omega_{ij} = \omega_i$ y preferencias $\succeq_{ij}=\succeq_i$. Cada asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $rx = (x_{11}, \ldots, x_{1r}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nr})$ para cada economía réplica $r\mathcal{E}_n$, siendo $x_{ij} = x_i$, para todo $j = 1, \ldots, r$ y para todo $i = 1, \ldots, n$. Tales asignaciones se denominan asignaciones de igual tratamiento en $r\mathcal{E}_n$. Denotemos por $N'(r\mathcal{E}_n)$ el conjunto de asignaciones $x$ en $\mathcal{E}_n$, tales que $rx \in N(r\mathcal{E}_n)$. Si las preferncias son convexas se verifica que si $x \in N(r\mathcal{E}_n)$, entonces $\overline{x} \in N'(r\mathcal{E}_n)$, con $\overline{x}_i = r^{-1} \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$. Si las preferencias son estrictamente convexas, entonces $N(r\mathcal{E}_n) \equiv N'(r\mathcal{E}_n)$.

Un equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $(x_1, \ldots, x_n)$ que pertenece al núcleo de cualquier réplica. Denotemos por $E(\mathcal{E}_n)$ el conjunto de asignaciones de equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$. Esto es, $E(\mathcal{E}_n) = \bigcap_{r \geq 1} N'(r\mathcal{E}_n)$.

García y Hervés suponen que los conjuntos de consumo son cerrados y convexos, y las preferencias continuas y convexas. Prueban que $((x_1, \ldots, x_n), p)$ es equilibrio Walrasiano de la economía discreta $\mathcal{E}_c$ si y sólo si $(f, p)$ es equilibrio Walrasiano de la economía continua de $n$ tipos $\mathcal{E}_n$. También obtienen que $(x_1, \ldots, x_n)$ es equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$ si y sólo si $f$ es una asignación del núcleo de la economía $\mathcal{E}_c$. Estos resultados ponen de manifiesto que los estados "óptimos" de la economía de $n$ agentes $\mathcal{E}_n$ se corresponden con los estados "óptimos" de la economía continua de $n$ tipos $\mathcal{E}_c$. Establecen en que sentido el tratamiento continuo y discreto pueden ser considerados equivalentes, respecto al problema del equilibrio y respecto al mecanismo del veto. Se ha supuesto que todos los agentes que denominamos del mismo tipo tienen idénticos recursos y preferencias. Esto es, el observador ve como idénticos a los agentes que están en un mismo subintervalo. Sin embargo, si se considera una economía con un continuo de agentes, donde las preferencias y recursos no son idénticas en los subintervalos que representan tipos de agentes, cabe considerar otros modos de establecer planteamientos discretos de la economía continua de partida. Por ejemplo, cabe plantearse el caso en el que las preferencias de los agentes de un mismo tipo se perciben por el observador o por el mercado como la media de las preferencias de los agentes que se incluyen en un mismo tipo. En lo que sigue consideramos otros modos de plantear de manera discreta una economía continua.

# 4 Preferencia media

Consideremos que para cada $n$ la relación de preferencias de cada agente $t \in I$, $\succeq_t^n$, viene representada por la función de utilidad, definida por $U^n(t,x) = \frac{1}{\mu(I_i^n)}\int_{I_i^n} U(t,x)d\mu(t)$, para cada $t \in I_i^n$. En este caso, nos referiremos a $\succeq_t^n$ como preferencia media. El observador aprecia un conjunto de agentes que le parecen idénticos, con unos recursos y unas preferencias que son la media de todo el conjunto de agentes.

**Observaciones.**

1. Obsérvese que si $U(t,\cdot)$ es continua en $x$ para casi todo $t \in I$, entonces $U^n(t,\cdot)$ es continua en $x$, para todo $t \in I$ y para todo $n$. En efecto, sea $(x^k)$ una sucesión que converge a $x$. Entonces, para cada $t \in I_i^n$ se verifica que $U^n(t,x) = \frac{1}{\mu(I^n)}\int_{I_i^n} \lim_k U(t,x^k)d\mu(t)$. Utilizando el teorema de la convergencia dominada, se tiene que $U^n(t,x) = \frac{1}{\mu(I^n)}\lim_k \int_{I_i^n} U(t,x^k)d\mu(t) = \lim_k U^n(t,x^k)$.

2. Por otra parte, el teorema de diferenciación de Lebesgue permite concluir que $\omega^n(t)$ converge a $\omega(t)$, y dado $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ se verifica que $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$, para casi todo $t \in I$. Luego, por el teorema de Egoroff, se tiene que $\omega^n$ (resp. $U^n(\cdot,x)$) converge a $\omega(t)$ (resp. a $U(\cdot,x)$) casi uniformemente. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $I_\varepsilon \subset I$, con $\mu(I_\varepsilon) > \mu(I) - \varepsilon$, tal que $\omega^n$ converge uniformemente a $\omega$, y $U^n(\cdot,x)$ converge uniformemente a $U(\cdot,x)$ en $I_\varepsilon$. Nótese que $I_\varepsilon$ depende de $x$.

3. Obsérvese que para cada $n$ se tiene que $\int_{I_i^n} \omega^n(t)d\mu(t) = \int_{I_i^n} \omega(t)d\mu(t)$, cualquiera que sea $i \in \{1,\ldots,2^n\}$.

4. Nótese que si $U(t,\cdot)$ es cóncava para casi todo $t \in I$, entonces $U^n(t,\cdot)$ es cóncava para todo $t \in I$ y para todo $n$. Sin embargo, la cuasi-concavidad de $U(t,\cdot)$ para casi todo $t \in I$ no garantiza la cuasi-concavidad de las preferencias medias $U^n(t,\cdot)$.

5. Teniendo en cuenta los resultados de García y Hervés (1993), se deduce que si para casi todo $t \in I$ la función de utilidad $U(t,\cdot)$ es cóncava, entonces $((x_1,\ldots,x_{2^n}),p)$ es equilibrio Walrasiano de la economía con $2^n$ agentes $\mathcal{E}_n$ si y sólo si $(f,p)$ es equilibrio Walrasiano de la economía continua $\mathcal{E}_c^n$. También se concluye que $(x_1,\ldots,x_{2^n})$ es equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$ si y sólo si $f$ es una asignación del núcleo de la economía $\mathcal{E}_c^n$.

Como ya hemos señalado, estamos interesados en estudiar relaciones entre $\mathcal{E}_c$ y $\mathcal{E}_n$ por lo que al mecanismo del veto se refiere. Concretamente, probaremos que dada una asignación $f$ en la economía continua $\mathcal{E}_c$ se verifica que si la asignación $x^n \in N(\mathcal{E}_n)$ para todo $n \geq n_0$, entonces $f \in N(\mathcal{E}_c)$, siendo $x_i^n = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)}\displaystyle\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$. Para ello, establecemos algunos resultados previos.

**Lema** 4.1 *Sean $g^n, g : I \to \mathbb{R}^\ell$ funciones $\mu$-integrables, tales que $g^n(t)$ converge a $g(t)$ en casi todo punto. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k(\varepsilon) > 0$, existe $n(\varepsilon)$, y existe $J_\varepsilon \subset I$, con $\mu(J_\varepsilon) < \varepsilon$, tales que $\|g^n(t)\|, \|g(t)\| < k(\varepsilon)$, para todo $t \notin J_\varepsilon$, para todo $n \geq n(\varepsilon)$.*

*Demostración.* Por la desigualdad de Chebysev, se tiene que existe $k$ tal que $\mu(\{t \in I | \|g(t)\| > k\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, el teorema de Egoroff garantiza que existe $J \subset I$, con $\mu(J) < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que $g^n$ converge uniformemente a $g$ en $I \setminus J$. Basta ahora tomar $J_\varepsilon = J \bigcup \{t \in I | \|g(t)\| > k\}$, y $k(\varepsilon) > k$.

Q.E.D.

Consideremos ahora una asignación $f : I \to \mathbb{R}_+^\ell$ factible en la economía $\mathcal{E}_c$. Para cada $n$ sea $f^n : I \to \mathbb{R}_+^\ell$ la asignación factible en la economía $\mathcal{E}_c^n$, dada por $f^n(t) = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)}\displaystyle\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$, para cada $t \in I_i^n$.

Establecemos a continuación notaciones que utilizamos en el siguiente lema. Para cada $z \in \mathbb{Q}^\ell$ definimos $\Gamma(z) = \{t \in I | U(t, z + \omega(t) > U(t, f(t))\}$, y $\Gamma^n(z) = \{t \in I | U^n(t, z + \omega^n(t)) > U^n(t, f^n(t))\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{Q}^\ell | \mu(\Gamma(z)) = 0\}$. Así, $\mu(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} \Gamma(z)) = 0$. Por último para cada $t \in I$, sea $\psi(t) = \{z \in \mathbb{R}^\ell | U(t, z + \omega(t) > U(t, f(t))\}$.

**Lema** 4.2 *Sea $S$ una coalición que veta la asignación $f$ en la economía $\mathcal{E}_c$. Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, \ell + 1\}$, existen $\alpha_i \in \mathbb{Q}_+$, $z_i \in \mathbb{Q}^\ell$, y $t_i \in \hat{S} = S \setminus \bigcup_{z \in Z} \Gamma(z)$, tales que $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$, $0 = \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i z_i$, y $z_i \in \psi(t_i)$.*

*Demostración.* Como $S$ veta $f$, existe $g : S \to \mathbb{R}_+^\ell$, tal que $\displaystyle\int_S g(t)d\mu(t) \leq \int_S \omega(t)d\mu(t)$ y $g(t) \succ_t f(t)$, para casi todo $t \in S$. Teniendo en cuenta que $\mu(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} \Gamma(z)) = 0$, se deduce que $\hat{S}$ es una coalición que también veta $f$ vía la misma asignación $g$. Por otra parte, se verifica que $\dfrac{1}{\mu(\hat{S})}\displaystyle\int_{\hat{S}} (g(t) - \omega(t))d\mu(t) \in co\left((g - \omega)(\hat{S})\right)$. Por tanto, $0 \in co\left(\bigcup_{t \in \hat{S}} \psi(t)\right)$. Por el teorema de Caratheodory, se obtiene que existen $\alpha_i \geq 0$, y $z_i \in \psi(t_i)$, con $t_i \in \hat{S}$, $i = 1, \ldots, \ell + 1$, tales que $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i z_i$. Veamos que podemos tomar cada $\alpha_i \in \mathbb{Q}_+$. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_i^k = E[k\alpha_i + 1]$, donde $E[t]$ denota la parte entera del número real $t$. Sea $z_i^k = \dfrac{k\alpha_i}{\alpha_i^k} z_i \in \mathbb{R}^\ell$. Como $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{k\alpha_i}{\alpha_i^k} = 1$, obtenemos que: $\displaystyle\lim_{k \to \infty} z_i^k = z_i$. Luego, por continuidad de las preferencias, existe $k_0$ tal que

$z_i^k \in \psi(t_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell+1\}$, para todo $k \geq k_0$. Además, se verifica que $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i^k z_i^k = \sum_{i=1}^{\ell+1} k\alpha_i z_i = 0$, donde $\alpha_i^k$ son enteros para todo $i \in \{1, \dots, \ell+1\}$. Por último, veamos que podemos tomar cada $z_i \in \mathbb{Q}^\ell$. En efecto, para cada $i$, sea $(z_i^n)$ una sucesión que converge a $z_i$, con $z_i^n \in \mathbb{Q}^\ell$, y $z_i^n \geq z_i$. Por continuidad de las preferencias, se deduce que existe $n_0$ tal que $z_i^n \in \psi(t_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell+1\}$, para todo $n \geq n_0$. Por construcción de las sucesiones $(z_i^n)$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i z_i^n = -r^n$, con $r^n \geq 0$. La monotonía de las preferencias garantiza que $z_i^n + r^n \in \psi(t_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$, para todo $n \geq n_0$.

Q.E.D.

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^\ell)$ el conjunto de funciones continuas definidas en $\mathbb{R}_+^\ell$ y con valores reales. Consideremos en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^\ell)$ la topología de la convergencia uniforme en compactos. Este espacio es metrizable. De hecho, sea la métrica $\eta$ dada por

$$\eta(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \eta_n(f,g), \quad \text{donde } \eta_n(f,g) = \sup_{\|x\| \leq n} \frac{| f(x) - g(x) |}{1 + | f(x) - g(x) |}$$

Se verifica que una sucesión de funciones $(f_n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^\ell)$ converge uniformemente a $f$ en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+^\ell$ si y sólo si $\eta(f_n, f)$ converge a cero.

Sea $U : I \to \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^\ell)$ la función que a cada agente $t \in I$ le asigna su función de utilidad $U(t, \cdot)$. En lo que sigue suponemos que $U$ es continua.

**Lema** 4.3 *Para casi todo $t \in I$ se verifica que $U^n(t, \cdot)$ converge a $U(t, \cdot)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}_+^\ell$.*

*Demostración.* Por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que dado $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ se verifica que $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para casi todo $t \in I$. En particular, para cada $x \in \mathbb{Q}_+^\ell$ existe $J(x) \subset I$, con $\mu(J(x)) = 1$, tal que $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para todo $t \in J(x)$. Sea $J = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}_+^\ell} J(x)$. Entonces $\mu(J) = 1$ y $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para todo $t \in J$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{Q}_+^\ell$. Veamos que $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para todo $t \in J$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}_+^\ell$. Para ello, para cada $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ consideremos una sucesión $(x^k) \subset \mathbb{Q}_+^\ell$, tal que $x^k \to x$. Por continuidad de las funciones $U^n(t, \cdot)$ se deduce que $\lim_{k\to\infty} U^n(t, x^k) = U^n(t,x)$ para todo $n$ y para todo $t \in I$. Se verifica también que $\lim_{n\to\infty} U^n(t,x^k) = U(t,x^k)$ para todo $k$ y para todo $t \in J$. Más aún, la convergencia es uniforme en $k$. En efecto, sea $K = \{U(\cdot, x_k), k \in \mathbb{N}\}$. Por ser $U$ continua, se tiene que $K$ es un conjunto equicontinuo. Luego, por el teorema de Ascoli-Arzela $K$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(I)$. Como la inclusión de $\mathcal{C}(I)$ en $L^\infty(I, \mathbb{R})$ es continua, se obtiene que $K$ es relativamente compacto en $L^\infty(I, \mathbb{R})$. Esto implica (véase Dunford-Schwartz, IV.8.18) que $U^n(t,x^k)$ converge a $U(t,x^k)$ y la convergencia es uniforme en $k$ . Aplicando el lema de Moore (véase Dunford-Schwartz, I.7.6), se concluye que $\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} U^n(t,x^k) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} U^n(t,x^k) = \lim_{k\to\infty} U(t,x^k) =$

$U(t,x)$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} U^n(t,x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} U^n(t,x^k) = U(t,x)$. Luego $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para casi todo $t \in I$ para todo $x \in \mathbb{R}^\ell_+$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ y $(x^m) \subset \mathbb{R}^\ell_+$, tal que $x^m \to x$. Con el mismo argumento anterior se tiene que $\lim_{(n,m)} U^n(t,x^m) = U(t,x)$, para todo $t \in J$. En particular, si $n = m$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} U^n(t,x^n) = U(t,x)$, para todo $t \in J$. Esto es, $U^n(t,\cdot)$ converge continuamente a $U(t,\cdot)$ en cada $x \in \mathbb{R}^\ell_+$. Esto es equivalente a que $U^n(t,\cdot)$ converge a $U(t,\cdot)$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\ell_+$. (Véase Royden, problema 9.40).

Q.E.D.

**Lema** 4.4 *Sea $K$ un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^\ell_+$. Se verifica que $U^n(\cdot,\cdot)$ converge a $U(\cdot,\cdot)$ casi uniformemente en $I$ y uniformemente en $K$. Esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $J_\varepsilon \subset I$, con $\mu(J_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, tal que $U^n(\cdot,\cdot)$ converge a $U(\cdot,\cdot)$ uniformemente en $J_\varepsilon$ y en $K$.*

*Demostración.* Por el lema anterior, existe $J \subset I$, con $\mu(J) = 1$, tal que para todo $t \in J$ se verifica que $U^n(t,x)$ converge a $U(t,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ y la convergencia es uniforme en $K$. Para cada $k, m$ enteros positivos, definimos

$$J_{k,m} = \left\{ t \in J \;\middle|\; | U^n(t,x) - U(t,x) | < \frac{1}{m},\ \text{para todo } n \geq k,\ \text{para todo } x \in K \right\}$$

Entonces $J_{k,m} \subset J_{k+1,m}$ para todo $m$ y para todo $k$. Además, por la convergencia uniforme en $K$ para todo $t \in J$, se tiene que $J = \bigcup_{k=1}^\infty J_{k,m}$ para todo $m$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $m$ existe $k(m)$ tal que $\mu(J \setminus J_{k(m),m}) < \varepsilon 2^{-m}$. Sea $J_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^\infty J_{k(m),m}$. Entonces, $\mu(J \setminus J_\varepsilon) < \varepsilon$ y además $| U^n(t,x) - U(t,x) | < m^{-1}$, para todo $n \geq k(m)$, para todo $t \in J_\varepsilon$. Luego $U^n(\cdot,\cdot)$ converge a $U(\cdot,\cdot)$ uniformemente en $J_\varepsilon$ y en $K$.

Q.E.D.

**Teorema** 4.1 *Sea $f$ una asignación factible en la economía $\mathcal{E}_c$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos en la economía discreta $\mathcal{E}_n$ la asignación $x^n$, definida por $x_i^n = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)}\displaystyle\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$. Si $x^n \in N(\mathcal{E}_n)$ para todo $n \geq n_0$, entonces $f \in N(\mathcal{E}_c)$.*

*Demostración.* Supongamos $f \notin N(\mathcal{E}_c)$. Entonces, existe una coalición $S$ que veta $f$. Por el lema 2, se tiene que existen $\alpha_i \in \mathbb{Q}_+$ y $z_i \in \psi(t_i)$, $i = 1, \ldots, \ell+1$, con $t_i \in \hat{S} = S \setminus \bigcup_{z \in Z} \Gamma(z)$ y $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$, tales que $0 = \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i z_i$. De acuerdo con la definición de $\hat{S}$, como $z_i \in \psi(t_i)$, se tiene que $\mu(\Gamma(z_i)) > 0$. Por tanto, existe $\alpha > 0$, tal que $\mu(\Gamma(z_i)) \geq \alpha$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell+1\}$. También se verifica que $z_i \in \psi(t)$ para todo $t \in \Gamma(z_i)$, esto es, $U(t, z_i + \omega(t)) - U(t, f(t)) > 0$ para todo $t \in \Gamma(z_i)$. Por tanto, existe $B_i \subset \Gamma(z_i)$, con $\mu(B_i) < \frac{\alpha}{8}$, y existe $\delta > 0$, tales que $U(t, z_i + \omega(t)) - U(t, f(t)) \geq \delta$ para todo $t \in \Gamma(z_i) \setminus B_i$.

Por el lema 8.1, existe $A \subset I$, existe $n_0$ y existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^\ell$, tales que $\mu(A) < \frac{\alpha}{8}$, $f(t), f^n(t), z_i + \omega^n(t) \in K$, para todo $t \in A$ y para todo $n \geq n_0$. Recordar que $f^n(t) = x_i^n$, si $t \in I_i^n$. Por el lema 8.4, existe un conjunto de agentes $B \subset I$, con $\mu(B) < \frac{\alpha}{8}$, tal que $f^n(t) \to f(t)$, $\omega^n(t) \to \omega(t)$ y $U^n(t,x) \to U(t,x)$ uniformemente para todo $t \notin B$, para todo $x \in K$.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos la aplicación $\varphi(\cdot, \varepsilon) : I \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$\varphi(t,\varepsilon) = \sup_{\substack{x \in K \\ \|y\| \leq \varepsilon}} \mid U(t, x+y) - U(t,x) \mid$$

Nótese que $\varphi(t,\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ y $\varphi(t,\varepsilon)$ converge a 0 cuando $\varepsilon \to 0$. Además, para cada $\varepsilon$, la aplicación $\varphi(\cdot,\varepsilon)$ es medible. Sea $I_\varepsilon = \{t \in I | \varphi(t,\varepsilon) < \frac{\delta}{4}\}$. Así, si $\varepsilon < \varepsilon'$ entonces $I_{\varepsilon'} \subset I_\varepsilon$. Además $I = \bigcup_\varepsilon I_\varepsilon$. Por tanto, existe $\varepsilon_0$ tal que $\mu(I \setminus I_{\varepsilon_0}) < \frac{\alpha}{8}$ y $\varphi(t, \varepsilon_0) < \frac{\delta}{4}$ para todo $t \in I_{\varepsilon_0}$. Sea $\Gamma'(z_i) = (\Gamma(z_i) \bigcap I_{\varepsilon_0}) \setminus (A \bigcup B \bigcup B_i)$. Entonces $\mu\left(\Gamma'(z_i)\right) > \frac{\alpha}{2}$. Además $f^n$ (resp. $\omega^n$) converge a $f$ (resp. a $\omega$) uniformemente en $\Gamma'(z_i)$. Por tanto, existe $n_1$ tal que $\|f^n(t) - f(t)\|$, $\|\omega^n(t) - \omega(t)\| < \varepsilon_0$ para todo $n \geq n_1$, para todo $t \in \Gamma'(z_i)$. Se obtiene entonces que para todo $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ se verifica que $U(t, z_i + \omega^n(t)) - U(t, f^n(t)) > \frac{\delta}{2}$ para todo $t \in \Gamma'(z_i)$. Por la convergencia uniforme de $U^n(t,x)$ con $t \in \Gamma'(z_i)$ y $x \in K$, existe $n_2$ tal que $\mid U^n(t,x) - U(t,x) \mid < \frac{\delta}{4}$, para todo $x \in K$, para todo $t \in \Gamma'(z_i)$ y para todo $n \geq n_2$. En consecuencia, para todo $n \geq \bar{n} = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ se verifica que $U^n(t, z_i + \omega^n(t)) - U^n(t, f^n(t)) > 0$, para todo $t \in \Gamma'(z_i)$. De esto se deduce existe $\hat{n}$ tal que $\Gamma'(z_i) \subset \Gamma^n(z_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell+1\}$, para todo $n \geq \hat{n}$. Además $\mu\left(\Gamma^n(z_i)\right) > \frac{\alpha}{2}$.

Por otra parte, para cada $i$ puede escribirse $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta}$, con $\beta_i, \beta \in \mathbb{N}$ y $\beta_i \leq \beta$. Por definición de $\Gamma^n$, se verifica que para cada $n$ y para cada $i$ existe un subconjunto de tipos $T_i^n \subset \{1, \ldots, 2^n\}$, tal que $\Gamma^n(z_i) = \bigcup_{j \in T_i^n} I_j^n$. Como $\mu(I_i^n)$ converge a cero cuando $n$ tiende a $\infty$, pero $\mu\left(\Gamma^n(z_i)\right) > \frac{\alpha}{2} > 0$, se obtiene que existe $n^*$ tal que $Card(T_i^n) > \beta$, para todo $i$, para todo $n \geq n^*$. Consideremos $J_i^n \subset T_i^n$ con $Card(J_i^n) = \beta_i$. Para cada $n \geq n^*$ sea $y^n$ una asignación que asocia a cada $j \in J_i^n$ el vector $y_j^n = z_i + \omega^n(t_{j,i})$, con $t_{j,i} \in I_j^n \subset \Gamma^n(z_i)$, $1 \leq j \leq \beta_i$. Veamos que la coalición $J^n = \bigcup_{i=1}^{\ell+1} J_i^n$ puede garantizarse la asignación $y^n$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\beta_i} (z_i + \omega^n(t_{j,i})) &= \sum_{i=1}^{\ell+1} \beta_i z_i + \sum_{i=1}^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\beta_i} \omega^n(t_{j,i}) \\
&= \beta \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\beta_i} \omega^n(t_{j,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\beta_i} \omega^n(t_{j,i})
\end{aligned}$$

Se concluye, entonces que para todo $n \geq n^*$ la coalición $J^n$ veta la asignación

$x^n$ en la economía $\mathcal{E}_n$.

Q.E.D.

**Corolario** 4.1 *Sea $f$ una asignación factible en la economía $\mathcal{E}_c$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos en la economía continua $\mathcal{E}_c^n$ de $2^n$ tipos la asignación $f^n$, definida por $f^n(t) = x_i^n$ si $t \in I_i^n$. Para cada $n$ sea $\mathcal{S}^n$ la $\sigma$- álgebra generada por los subintervalos $I_i^n$. Si $f^n \in \mathcal{S}^n$-$N(\mathcal{E}_c^n)$ para todo $n \geq n_0$, entonces $f \in N(\mathcal{E}_c)$.*

*Demostración.* Basta hacer notar que $x^n \in N(\mathcal{E}_n)$ si y sólo si $f^n \in \mathcal{S}^n$-$N(\mathcal{E}_c^n)$.

**Observaciones.** Nótese que los resultados obtenidos son válidos si $U$ es continua a trozos. Se ha supuesto continuidad de $U$ simplemente por claridad y simplificación en las pruebas.

Por otra parte, el resultado recíproco del Corolario 4.1 no es cierto. El hecho de que $f$ pertenezca al $N(\mathcal{E}_c)$ no garantiza que $f^n$ sea un elemento del $\mathcal{S}^n$-$N(\mathcal{E}_c^n)$ para $n$ suficientemente grande. Para ver esto, elijamos $\alpha$ y $\beta$, con $0 < \alpha < \beta < 1$, tales que para infinitos $n$ y para todo $i = i(n), j = j(n) \in \{1, \ldots, 2^n\}$, con $i \neq j$, tales que $\alpha \in I_i^n$, y $\beta \in I_j^n$, se verifica que $\mu(\{t \in I_i^n | t < \alpha\}) > \mu(\{t \in I_i^n | t > \alpha\})$, y $\mu\left(\left\{t \in I_j^n | t > \beta\right\}\right) > \mu\left(\left\{t \in I_j^n | t < \beta\right\}\right)$. El teorema de Cantor de los intervalos encajados garantiza que existen $\alpha$ y $\beta$ en estas condiciones.

Consideremos la economía $\mathcal{E}_c$ definida sobre el espacio de mercancías $RR^2$. Cada agente $t \in [0,1]$ viene caracterizado por recursos iniciales $\omega(t)$ y relación de preferencias representables por la función de utilidad $U(t,(x,y))$, que se definen como sigue

$$\omega(t) = \begin{cases} (1,0) \text{si} \quad t < \alpha \ \text{ ó } \ t > \beta \\ (0,1) \quad \text{si} \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

$$U(t,(x,y)) = \begin{cases} 2x + y \text{si} \quad t < \alpha \ \text{ ó } \ t > \beta \\ x + 2y \quad \text{si} \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

Es fácil comprobar que la asignación $f$ definida por $f(t) = \omega(t)$ pertenece al $N(\mathcal{E}_c)$. Sin embargo, existe una subsucesión $(n_k)$ tal que $f^{n_k} \notin \mathcal{S}^{n_k}$-$N(\mathcal{E}_c^n)$ para ningún $n_k$. En efecto, para cada $n_k$ la coalición $S_{n_k} = I_i^n \bigcup I_j^n$ veta la asignación $f^{n_k}$ vía una asignación $g_{n_k}$ en la economía $\mathcal{E}_c^n$, donde los agentes en $I_i^n \bigcup I_j^n$ pueden intercambiar mercancías 1 y 2 respectivamente, mejorando su utilidad $U^n$.

Nótese que $U$ y $\omega$ son continuas a trozos. Pero, estudiando el ejemplo, es fácil ver que $U$ y $\omega$ pueden elegirse continuas, llegando a la misma conclusión.

A pesar de que no se verifique el reultado recíproco del corolario 4.1 pueden obtenerse algunas versiones recíprocas menos exigentes. De esto nos ocupamos a continuación.

Denotemos por $\mathcal{P}$ el conjunto preferencias derivadas de órdenes completos, reflexivos, transitivos, continuos y monótonos, definidos sobre $\mathbb{R}_+^\ell$. Cada $\succ \in \mathcal{P}$ puede representarse por una función de utilidad continua del siguiente modo. Para cada $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ existe un único vector $y$ en la diagonal principal, tal que $x \sim y$. Sea $U(x) = \|y\|$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea. $U$ es continua y y viene determinada por $U(x) = \|x\|$ para todo $x$ en la diagonal principal. Además existe una constante $k$, que depende sólo de $\ell$, tal que $0 \leq U(x) \leq k\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^\ell$. Denotemos por $\mathcal{U}$ el conjunto de funciones de utilidad obtenido de este modo. Se verifica que la mínima topología sobre $\mathcal{P}$ que hace que el conjunto $\{(x, y, \succ) | x \succ y\}$ sea abierto en el espacio producto $\mathbb{R}_+^\ell \times \mathbb{R}_+^\ell \times \mathcal{P}$, es la inducida por la métrica

$$\rho(\succ_1, \succ_2) = \max_{x \in \mathbb{R}_+^\ell} \frac{| U_1(x) - U_2(x) |}{1 + \|x\|^2}$$

donde $U_i$ es la utilidad en $\mathcal{U}$ que representa $\succ_i$. Esta topología tiene una base numerable, y además que la función $\succ: I \to \mathcal{P}$ sea medible es equivalente a que sea medible en el sentido de Aumann, es decir, en el sentido que hemos establecido. (Véase Kannai (1970)).

**Proposición** 4.1 *Sea $(\succeq_n) \subset \mathcal{P}$ una sucesión de relaciones de preferencias y sea $\succeq \in \mathcal{P}$. Se verifica que $\rho(\succeq_n, \succeq)$ converge a cero si y sólo si $U_n$ converge a $U$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+^\ell$, siendo $U_n$ la función de utilidad en $\mathcal{U}$ que representa $\succeq_n$ y $U$ la función de función de utilidad en $\mathcal{U}$ que representa $\succeq$ .*

*Demostración.* Veamos, en primer lugar, la condición necesaria. Supongamos que $\rho(\succeq_n, \succeq)$ converge a cero. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $K$ un compacto de $\mathbb{R}_+^\ell$. Entonces, existe $r$ tal que $K \subset B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}_+^\ell | \|x\| < r\}$. Consideremos $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{1 + r^2}$. Como $\succeq_n \xrightarrow{\rho} \succeq$, existe $n_0$ tal que $\rho(\succeq_n, \succeq) \leq \hat{\varepsilon}$, para todo $n \geq n_0$. Por otra parte, se verifica que

$$\begin{aligned} \max_{x \in K} | U_n(x) - U(x) | &\leq \max_{x \in K} \frac{| U_n(x) - U(x) |}{1 + \|x\|^2} \max_{x \in K} (1 + \|x\|^2) \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^\ell} \frac{| U_n(x) - U(x) |}{1 + \|x\|^2} (1 + r^2) \end{aligned}$$

Por tanto, $\max\limits_{x \in K} | U_n(x) - U(x) | \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Esto permite concluir que $U_n$ converge a $U$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}_+^\ell$.

Veamos ahora la condición suficiente. Supongamos que $U_n$ converge a $U$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+^\ell$. Como $U_n \in \mathcal{U}$ para todo $n$, y $U \in \mathcal{U}$, existe una constante $k$, que sólo depende de $\ell$, tal que $U_n(x) \leq k\|x\|$ y $U(x) \leq k\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^\ell$, para todo $n$. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $r > 1$ tal que $\dfrac{2kr}{1 + r^2} < \varepsilon$. Consideremos $K = \{x \in \mathbb{R}_+^\ell | \|x\| \leq r\}$. $K$ es un compacto de $\mathbb{R}_+^\ell$, luego $U_n$ converge a $U$ uniformemente en $K$. Por tanto, existe $n_0$ tal que, para todo $n \geq n_0$ se verifica que $\max\limits_{x \in K} \mid U_n(x) - U(x) \mid \leq \varepsilon$. Por definición de $K$ se obtiene que $\max\limits_{x \in K} \dfrac{\mid U_n(x) - U(x) \mid}{1 + \|x\|^2} \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Consideremos ahora $x \notin K$. Entonces, $\|x\| > r > 1$. Por tanto, si $x \notin K$ se verifica que

$$\frac{\mid U_n(x) - U(x) \mid}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{\mid U_n(x) \mid + \mid U(x) \mid}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{2k\|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{2kr}{1 + r^2}$$

donde la última desigualdad se obtiene de que la aplicación $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(t) = \dfrac{2kt}{1 + t^2}$, es decreciente si $t \geq 1$. Esto permite concluir que $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^\ell_+} \dfrac{\mid U_n(x) - U(x) \mid}{1 + \|x\|^2} \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Por tanto, $\rho(\succeq_n, \succeq)$ converge a cero.

Q.E.D.

**Observaciones.** Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función creciente y continua. Entonces, en la proposición 8.1, $U_n$ y $U$ pueden sustituirse por $\phi o U_n$ y $\phi o U$, respectivamente. Más aún, sea $\phi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ creciente y continua para todo $n$, tal que $\phi_n$ converge a $\phi$ uniformemente en compactos. Entonces, $U_n$ y $U$ pueden sustituirse por $\phi_n o U_n$ y $\phi \circ U$, respectivamente.

**Teorema** 4.2 *Para cada agente $t \in I$, sea $\succeq_t$ (resp. $\succeq_t^n$) su relación de preferencias en la economía $\mathcal{E}_c$ (resp. $\mathcal{E}_c^n$) , representada por la función de utilidad $U(t, \cdot)$ (resp. $U^n(t, \cdot)$). Supongamos $U(t, \cdot) \in \mathcal{U}$ para casi todo $t \in I$. Entonces $\rho(\succeq_t^n, \succeq_t)$ converge a cero, para casi todo $t \in I$.*

*Demostración.* Como $U(t, \cdot) \in \mathcal{U}$ para casi todo $t \in I$, se tiene que $U(t, x) = \|x\|$, para todo $x$ en la diagonal de $\mathbb{R}^\ell_+$, para casi todo $t \in I$. Por tanto, verifica que $U^n(t, \cdot) \in \mathcal{U}$, para todo $t \in I$ y para todo $n$, pues $U^n(t, x) = \|x\|$, para todo $x$ en la diagonal de $\mathbb{R}^\ell_+$. Por el lema 8.3, $U^n(t, \cdot)$ converge a $U(t, \cdot)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^\ell_+$, para casi todo $t \in I$. Aplicando la proposición 8.1 se concluye que $\rho(\succeq_t^n, \succeq_t)$ converge a cero, para casi todo $t \in I$.

Q.E.D.

**Observaciones.** Dados $a, b \in \mathbb{R}^\ell$ denotemos por $a \ominus b$ el vector en $\mathbb{R}^\ell_+$ cuya $k$-ésima coordenada es $\max\{a_k - b_k, 0\}$. Dado $\varepsilon > 0$, decimos que una asignación $f$ pertenece al $\varepsilon$-Núcleo de la economía continua $\mathcal{E}_c$, y denotamos $f \in \varepsilon\text{-}N(\mathcal{E}_c)$, si $g(t) \succ_t f(t)$ para casi todo $t \in S$ implica que no se verifica $\int_S g(t) d\mu(t) < \int_S \omega(t) d\mu(t) \ominus \varepsilon$. El resultado establecido en el teorema 4.2 permite obtener versiones del resultado recíproco obtenido en el corolario 4.1 en términos de $\varepsilon$-Núcleos. Para ello, supongamos que las $U(t, \cdot) \in \mathcal{U}$ para casi todo $t \in I$. Sea $f : I \to \mathbb{R}^\ell_+$ una asignación factible en la economía $\mathcal{E}_c$. Para cada $n$ sea

$f^n : I \to \mathbb{R}^\ell_+$ definina por $f^n(t) = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)} \displaystyle\int_{I_i^n} f(t)d\mu(t)$, para cada $t \in I_i^n$. Como ya se ha señalado $f^n$ es factible en la economía $\mathcal{E}_c^n$ y además $f^n(t)$ converge a $f(t)$ para casi todo $t \in I$. Por otra parte, obsérvese que el conjunto $\{\omega, \omega^n, n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente secuencialmente compacto en $L^1(I, \mathbb{R}^\ell_+)$. En efecto, $\omega^n(t)$ converge a $\omega(t)$ para casi todo $t \in I$, y además $\displaystyle\int_I \omega^n(t)d\mu(t) = \int_I \omega(t)d\mu(t)$, para todo $n$. Por tanto $\omega^n$ converge a $\omega$ en $L^1(I, \mathbb{R}^\ell_+)$. Luego, cualquiera que sea $h \in \mathrm{L}^\infty(I, \mathbb{R}^\ell_+)$, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_I h(t) \cdot \omega^n(t)d\mu(t) = \int_I h(t) \cdot \omega(t)d\mu(t)$. Así, el teorema 4.2 permite obtener los siguientes resultados como lectura de los establecidos en Kannai (1970):

- Sea $f \in N(\mathcal{E}_c)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0$, tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $f^n$ pertenece al $\varepsilon$-Núcleo de $\mathcal{E}_c^n$.
- Sea $f$ pertenece al $\hat{\varepsilon}$-Núcleo de $\mathcal{E}_c$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0$, tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $f^n$ pertenece al $\varepsilon + \hat{\varepsilon}$-Núcleo de $\mathcal{E}_c^n$.
- Si $f^n$ pertenece al $\hat{\varepsilon}$-Núcleo de $\mathcal{E}_c^n$ para todo $n$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $f$ pertenece al $\varepsilon + \hat{\varepsilon}$-Núcleo de $\mathcal{E}_c$.

# 5 Preferencia unánime

Consideremos ahora que para cada $n$ la relaciones de preferencias en la economía $\mathcal{E}_c^n$, vienen definidas como sigue

$$x \succeq_{t_0}^n y \;\Leftrightarrow\; x \succeq_t y \text{ para casi todo } t \in I_{i(t_0)}^n$$

siendo $I_{i(t_0)}^n$ el subintervalo tal que $t_0 \in I_{i(t_0)}^n$. En este caso, nos referiremos a $\succeq_t^n$ como preferencia unánime. Esta preferencia estima que un consumo es preferido a otro si es unánimemente preferido por todo el conjunto de agentes.

Denotemos $\succeq_i^n = \succeq_t^n$, con $t \in I_i^n$.

**Observaciones.**

1. Nótese que las relaciones de preferencia $\succeq_t^n$ no son completas. En efecto, si $\mu\left(\{t \in I_i^n | x \succ_t y\}\right) > 0$ y $\mu\left(\{t \in I_i^n | x \prec_t y\}\right) > 0$, entonces $x$ no es comparable a $y$ en la economía $\mathcal{E}_c^n$ para los agentes de tipo $i$.
2. $\succeq_t^n$ y $\succ_t^n$ son transitivas para todo $n$ y para todo $t \in I$.
3. Sea $t \in I_i^n$. Nótese que la relación de preferencia estricta $\succ_t^n$ y la relación de indiferencia $\sim_t^n$ vienen definidas por

$$x \succ_t^n y \;\Leftrightarrow\; x \succeq_t y \text{ para casi todo } t \in I_i^n \text{ y } \mu\left(\{t \in I_i^n | x \succ_t y\}\right) > 0$$

$$x \sim_t^n y \;\Leftrightarrow\; x \sim_t y \text{ para casi todo } t \in I_i^n$$

4. Sea $t_0 \in I_i^{n_0}$. Se verifica que $x \succeq_{t_0}^{n_0} y$ si y sólo si $x \succeq_t^n y$ para todo $t \in I_i^{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Nótese que, aunque la equivalencia se mantiene si sustituimos $\succeq_t^n$ por $\sim_t^n$, esta equivalencia no es válida si sustituimos $\succeq_t^n$ por la preferencia estricta $\succ_t^n$ .

5. Si $\succeq_t$ es continua para casi todo $t \in I$ entonces $\succeq_t^n$ es continua para todo $t \in I$ y para todo $n$, en el sentido de que los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}_+^\ell | y \succeq_t^n x\}$ son cerrados, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ . En efecto, sea $t_0 \in I_{i_0}^n$ y sea $y^k$ una sucesión convergente a $y$, tal que $y^k \succeq_{t_0}^n x$ para todo $k$. Entonces $y^k \succeq_t x$ para casi todo $t \in I_{i_0}^n$, para todo $k$. Por continuidad de $\succeq_t$ para casi todo $t \in I$, se deduce que $y \succeq_t x$ para casi todo $t \in I_{i_0}^n$. Por tanto $y \succeq_{t_0}^n x$. Esto es, para cada $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ y para cada $t \in I$ el conjunto $\{y | y \succeq_t^n x\}$ es cerrado, cualquiera que sea $n$. Con el mismo argumento se obtiene que para cada $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ y para cada $t \in I$ los conjuntos $\{y | y \preceq_t^n x\}$ , $\{y | y \sim_t^n x\}$ son cerrado, cualquiera que sea $n$.

6. Si $\succeq_t$ es convexa para casi todo $t \in I$ entonces $\succeq_t^n$ es convexa para todo $t \in I$ y para todo $n$.

7. Si $\succeq_t$ es monótona (resp. estrictamente monótona) para casi todo $t \in I$ entonces $\succeq_t^n$ es monótona (resp. estrictamente monótona) para todo $t \in I$ y para todo $n$.

**Lema** 5.1 *Sea $S \subset I_i^n$, con $\mu(S) > 0$. Sea $g : S \to \mathbb{R}_+^\ell$ una función $\mu$-integrable y sea $x \in \mathbb{R}_+^\ell$, tales que $g(t) \succ_i^n x$ para todo $t \in S$. Entonces $\dfrac{1}{\mu(S)} \displaystyle\int_S g(t) d\mu(t) \succ_i^n x$.*

*Demostración.* Sea $A = \{y \in \mathbb{R}_+^\ell | y \succ_i^n x\}$. Veamos en primer lugar que $A$ es convexo. En efecto, sean $y_1, y_2 \in A$. Entonces $y_1 \succeq_t x$, $y_2 \succeq_t x$ para casi todo $t \in I_i^n$ y además existen $S_1, S_2 \subset I_i^n$, con $\mu(S_1) > 0$ y $\mu(S_2) > 0$, tales que $y_1 \succ_t x$, para todo $t \in S_1$, $y_2 \succ_t x$ para todo $t \in S_2$. Sea $y_\lambda = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ con $0 < \lambda < 1$. Por la hipótesis de convexidad, existen $S_1' \subset S_1$, $S_2' \subset S_2$, con $\mu(S_1') = \mu(S_1)$ y $\mu(S_2') = \mu(S_2)$, tales que $y_\lambda \succ_t x$, para todo $t \in S' = S_1' \bigcup S_2'$. Por tanto, $y_\lambda \in A$. Luego $A$ es convexo. El teorema de convexidad establecido en Hüsseinov (1987) permite concluir que $\dfrac{1}{\mu(S)} \displaystyle\int_S g(t) d\mu(t) \in co(g(S))$. Como $g(S) \subset A$, se tiene que $\dfrac{1}{\mu(S)} \displaystyle\int_S g(t) d\mu(t) \succ_i^n x$.

Q.E.D.

Para cada $n$, denotemos por $\mathcal{S}^n$ la $\sigma$-álgebra generada por los subintervalos $I_i^n$, $i = 1, \ldots, 2^n$. Sea $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{S}^n$.

**Proposición** 5.1 *Sea $f$ una asignación factible en la economía $\mathcal{E}_c^n$, tal que $f(t) = f_i$ para todo $t \in I_i^n$, para cada $i$. Si $f \in \mathcal{S}^{n+1}$-$N(\mathcal{E}_c^{n+1})$, entonces $f \in \mathcal{S}^n$-$N(\mathcal{E}_c^n)$.*

*Demostración.* Supongamos $f \notin \mathcal{S}^n\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$. Entonces existe $S \in \mathcal{S}^n$ y existe $g : S \to \mathbb{R}_+^\ell$ tale que $\int_S g(t)d!\mu(t) \leq \int_S \omega^n(t)d!\mu(t)$ y $g(t) \succ_t^n f(t)$ para casi todo $t \in S$. Por definición de $\mathcal{S}^n$ se tiene que existe $T_S \subset \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $S = \bigcup_{i \in T_S} I_i^n$. Esto es, $T_S$ es el conjunto de tipos que constituyen la coalición $S$. Luego para cada $i \in T_S$ se tiene que $g(t) \succ_i^n f_i$ para todo $t \in I_i^n$. Para cada $i \in T_S$, denotemos $g_i = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)} \displaystyle\int_{I_i^n} g(t)d\mu(t)$. Consideremos $\tilde{g} : S \to \mathbb{R}_+^\ell$ definida por $\tilde{g}(t) = g_i$ si $t \in I_i^n$. Nótese que $\int_S \tilde{g}(t)d\mu(t) = \sum_{i \in T_S} \mu(I_i^n) g_i = \int_S g(t)d\mu(t)$. Por el lema 8.5 se tiene que $g_i \succ_i^n f_i$ para todo $i \in T_S$. Esto quiere decir que para cada $i \in T_S$ se verifica que $g_i \succeq_t f_i$ para casi todo $t \in I_i^n$, y además existe $S_i \subset I_i^n$, con $\mu(S_i) > 0$, tal que $g_i \succ_t f_i$ para todo $t \in S_i$. Por otra parte, $I_i^n = I_{2i-1}^{n+1} \bigcup I_{2i}^{n+1}$. Consideremos los conjuntos $T_1 = \{i \in T_S | \mu(S_i \bigcap I_{2i-1}^{n+1}) > 0\}$, $T_2 = \{i \in T_S | \mu(S_i \bigcap I_{2i}^{n+1}) > 0\}$. Nótese que $T_S = T_1 \bigcup T_2$.

Si $T_S = T_1 = T_2$, entonces $\tilde{g}(t) \succ_t^{n+1} f(t)$ para todo $t \in S$. Además, se verifica que $\int_S \tilde{g}(t)d\mu(t) = \int_S g(t)d\mu(t) \leq \int_S \omega^n(t)d\mu(t) = \int_S \omega^{n+1}(t)d\mu(t)$. Luego la coalición $S$ veta la asignación $f$ vía $\tilde{g}$ en la economía $\mathcal{E}_c^{n+1}$. Lo cual contradice el que $f \in \mathcal{S}^{n+1}\text{-}N(\mathcal{E}_c^{n+1})$.

En otro caso, para cada $i \notin T_1$ (resp. cada $i \notin T_2$) consideremos $S_{2i-1} \subset I_{2i-1}^{n+1}$ (resp. $S_{2i} \subset I_{2i}^{n+1}$), con $\mu(S_{2i-1}) = \mu(S_i)$ (resp. $\mu(S_{2i}) = \mu(S_i)$). Como $g_i \succ_t f_i$ para todo $t \in S_i$, por continuidad de las preferencias se tiene que existe una función $r_i : S_i \to \mathbb{R}_+^\ell$ acotada, tal que $g_i - r_i(t) \succ_t f_i$ para todo $t \in S_i$. Sea $\hat{r}_i = \int_{S_i} r_i(t)d\mu(t)$. Consideremos ahora $\hat{g} : S \to \mathbb{R}_+^\ell$ definida como sigue

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} g_i - r_i(t) & \text{si } t \in S_i, \text{ con } i \notin T_1 \text{ ó } i \notin T_2 \\[2ex] g_i + \dfrac{1}{\mu(S_{2i-1})}\hat{r}_i & \text{si } t \in S_{2i-1}, \text{ con } i \notin T_1 \\[2ex] g_i + \dfrac{1}{\mu(S_{2i})}\hat{r}_i & \text{si } t \in S_{2i}, \text{ con } i \notin T_2 \\[2ex] \tilde{g}(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por construcción, se tiene que $\int_S \hat{g}(t)d\mu(t) \leq \int_S \omega^{n+1}(t)d\mu(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_S \hat{g}(t)d\mu(t) &= \sum_{i\notin T_1}\mu(S_i)g_i - \sum_{i\notin T_1}\int_{S_i} r_i(t)d\mu(t) + \sum_{i\notin T_2}\mu(S_i)g_i - \sum_{i\notin T_2}\int_{S_i} r_i(t)d\mu(t) + \\
&\sum_{i\notin T_1}\mu(S_{2i-1})g_i - \sum_{i\notin T_1}\hat{r}_i + \sum_{i\notin T_2}\mu(S_{2i})g_i - \sum_{i\notin T_2}\hat{r}_i + \\
&\sum_{i\notin T_1}\mu\left((I_{2i-1}^{n+1}\setminus S_{2i-1})\right)g_i + \sum_{i\notin T_2}\mu\left((I_{2i}^{n+1}\setminus S_{2i})\right)g_i + \\
&\sum_{i\notin T_1}\mu\left((I_{2i}^{n+1}\setminus S_i)\right)g_i + \sum_{i\notin T_2}\mu\left((I_{2i-1}^{n+1}\setminus S_i)\right)g_i + \sum_{i\in T_1\cap T_2}\mu(I_i^n)g_i \\
&= \sum_{i\in\bigcap T_2}\mu(I_i^n)g_i + \sum_{i\notin T_1}\mu\left(I_{2i-1}^{n+1}\cup I_{2i}^{n+1}\right)g_i + \sum_{i\notin T_2}\mu\left(I_{2i-1}^{n+1}\cup I_{2i}^{n+1}\right)g_i
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que $\int_S \hat{g}(t)d\mu(t) = \sum_{i\in T_S}\mu(I_i^n)g_i = \int_S \tilde{g}(t)d\mu(t)$.

Por continuidad y monotonía de las preferencias, se obtiene que $\hat{g}(t) \succ_t^{n+1} f(t)$ para todo $t \in S$. Luego $f \notin \mathcal{S}^{n+1}\text{-}N(\mathcal{E}_c^{n+1})$.

Q.E.D.

**Proposición** 5.2 *Sea $\overline{n}$ entero positivo, y sea $f$ una asignación factibleen la economía $\mathcal{E}_c$, tal que $f(t) = f_i$ para todo $t \in I_i^{\overline{n}}$, $i = 1, \ldots, 2^{\overline{n}}$. si $f \in \mathcal{S}\text{-}N(\mathcal{E}_c)$, entonces $f \in \mathcal{S}^n\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$, para todo $n \geq \overline{n}$. Luego, si $f \in N(\mathcal{E}_c)$, entonces $f \in \mathcal{S}^n\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$, para todo $n \geq \overline{n}$.*

*Demostración.* Supongamos $f \notin \mathcal{S}^n\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$, para algún $n \geq \overline{n}$. Entonces, existe $S \in \mathcal{S}^n$ y existe $g : S \rightarrow$, tales que $\int_S g(t)d\mu(t) \leq \int_S \omega^n(t)d\mu(t)$, y además $g(t) \succ_t^n f(t)$ para todo $t \in S$. Sea $T_S \subset \{1, \ldots, 2^n\}$, tal que $S = \bigcup_{i\in T_S} I_i^n$. Se tiene que $g(t) \succ_i^n f_i$ para todo $t \in I_i^n$, con $i \in T_S$. Para cada $i \in T_S$ sea $g_i = \dfrac{1}{\mu(I_i^n)}\int_S g(t)d\mu(t)$. Consideremos $\tilde{g} : S \rightarrow \mathbb{R}_+^\ell$ definida por $\tilde{g}(t) = g_i$, si $t \in I_i^n$. Por construcción, se tiene que $\int_S \tilde{g}(t)d\mu(t) = \int_S g(t)d\mu(t)$. Por el lema 5.1 se verifica que $g_i \succ_i^n f_i$, para todo $i \in T_S$. Por definición de preferencia unánime $\succeq_i^n$, esto equivale a que para cada $i \in T_S$ existe $S_i^n \subset I_i^n$, con $\mu(S_i^n) > 0$, tal que $g_i \succeq_t f_i$, para casi todo $t \in I_i^n$ y $g_i \succ_t f_i$, para todo $t \in S_i^n$. Luego, la asignación $f$ está vetada por la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}_c$.

Q.E.D.

En la sección anterior hemos considerado un planteamiento discreto de la economía continua $\mathcal{E}_c$ vía la preferencia media. En este caso, como consecuencia del teorema 4.2 y de los resultados establecidos en el citado artículo de Kannai

(1970), hemos obtenido que si $f \in N(\mathcal{E}_c)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que $f^n \in \varepsilon\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$ para todo $n \geq n_0$. Este resultado no es válido si el planteamiento discreto se establece vía la preferencia unánime. Veamos que el hecho de que una asignación $f$ pertenezca al $N(\mathcal{E}_c)$ no implica que para cada $\varepsilon > 0$ se verifique que $f^n$ pertenezca al $\varepsilon\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$ para todo $n$ suficientemente grande. Para ello, consideremos una economía continua $\mathcal{E}_c$ donde se intercambia una sola mercancía. Cada agente $t \in I = [0,1]$ tiene recursos iniciales $\omega(t)$, tales que $\int_I \omega(t)d\mu(t) = 1$ y además $\int_0^{\frac{1}{2}} \omega(t)d\mu(t) = \frac{2}{3}$. La relación de preferencias del agente $t \in I$ vienen representadas por una función de utilidad $U(t,\cdot)$, definida por $U(t,x) = x$ si $x \leq 2^{-1} + t$, y $U(t,x) = 2^{-1} + t$ si $x > 2^{-1} + t$. Es fácil comprobar que la asignación $f(t) = 2^{-1} + t$ pertenece al núcleo de la economía $\mathcal{E}_c$. Sin embargo, si $\varepsilon < 6^{-1}$, entonces $f^n$ no pertenece a $\varepsilon\text{-}N(\mathcal{E}_c^n)$ para ningún $n$. En efecto, cualquiera que sea $n$ se tiene $f^n$ está vetada por la coalición $S = [0, 2^{-1})$ vía $g(t) = 1$ para cada $t \in S$.

Q.E.D.

# 6 Otras preferencias posibles: Preferencias mayoritarias

En las secciones anteriores se han establecido diferentes planteamientos discretos de economías continuas. Así, se ha considerado, como primer planteamiento, que el observador o el mercado percibe las preferencias de agentes del mismo tipo como la media de las preferencias reales de dichos agentes. En el segundo caso, el observador interpreta que un consumo es más preferido a otro si es unánimemente preferido por el conjunto de agentes que se incluyen en un determinado tipo. Podría pensarse que el observador no distingue todas las preferencias individuales, pero tiene capacidad para medir el tamaño relativo de los grupos de agentes que prefieren un consumo a otro. En este caso, percibiría una preferencia que denominamos mayoritaria. Para definir este tipo de preferencias, establecemos algunas notaciones previas.

Sean $x, y$ cestas de consumo en $\mathbb{R}_+^\ell$. Para cada $n$ entero positivo y para cada $i = 1, \ldots, 2^n$, consideramos los conjuntos $P_{x,y}^{i,n} = \{t \in I_i^n | x \succ_t y\}$, $I_{x,y}^{i,n} = \{t \in I_i^n | x \sim_t y\}$. Nótese que para cada $n$ se verifica que $I = \bigcup_{i=1}^{2^n} \left(P_{x,y}^{i,n} \bigcup P_{y,x}^{i,n} \bigcup I_{x,y}^{i,n}\right)$. Sea ahora $\succeq_i^n$ la preferencia que se estima para los agentes que forman el subintervalo $I_i^n$, y que se define como sigue

$$x \succ_i^n y \quad \Leftrightarrow \quad \mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) > 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$$

$$x \sim_i^n y \quad \Leftrightarrow \quad \mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right) \text{ y } \mu\left(P_{y,x}^{i,n}\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$$

Con la definición establecida, los agentes de tipo $i$, en la economía continua de $2^n$ tipos $\mathcal{E}_c^n$ o en la correspondiente economía de $2^n$ agentes, prefieren estrictamente el vector de consumo $x$ al vector de consumo $y$ si y sólo si la "mayoria" de los agentes en el subintervalo $I_i^n$ prefieren estrictamente $x$ a $y$. El consumo $x$ es indiferente a $y$ si y sólo si para cualquier coalición $S \subset I_i^n$, tal que $\mu(S) > 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$, se verifica que $\mu\left(\{t \in S | x \succ_t y\}\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$ y $\mu\left(\{t \in S | x \prec_t y\}\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$ esto es, $\mu\left(P_{x,y}^{i,n} \cap S\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$ y $\mu\left(P_{y,x}^{i,n} \cap S\right) \leq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$.

A continuación establecemos algunas propiedades de esta preferencia mayoritaria.

**Propiedades.**

1. La preferencia mayoritaria $\succ^n$ es completa, pero no transitiva.

2. Si las preferencias $\succeq_t$ son estrictamente monótonas para casi todo $t \in I$, entonces la preferencia mayorotaria $\succ_i^n$ es estrictamente monótona para todo $n$ y para todo $i$.

3. Supongamos que para casi todo $t \in I$ la preferencias $\succeq_t$ son convexas, en el sentido de que $x \succ_t y$ implica $\lambda x + (1-\lambda)y \succ_t y$, cualquiera que sea $0 < \lambda < 1$. Entonces preferencia mayorotaria $\succ_i^n$ es estrictamente convexa para todo $n$ y para todo $i$.

4. Si las preferencias $\succeq_t$ son continuas para casi todo $t \in I$, entonces el conjunto $\{y \in \mathbb{R}_+^\ell | y \succeq_i^n x\}$ es cerrado, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}_+^\ell$, para todo $n$ y para todo $i$. En efecto, sea $(y^k)$ una sucesión convergente a $y \in \mathbb{R}_+^\ell$, tal que $y^k \succeq_i^n x$. Supongamos $y \prec_t x$. Entonces, existe $S \subset I_i^n$, tal que $\mu(S) > 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$ y $U(t,x) > U(t,y)$ para todo $t \in S$. Sea $\varepsilon$, tal que $\mu(S) - \varepsilon > 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$. Existe $S' \subset S$, con $\mu(S') > \mu(S) - \frac{\varepsilon}{2}$, y existe $\alpha \geq 0$, tal que $U(t,x) - U(t,y) \geq \alpha$ para todo $t \in S'$. Por otra parte, para casi todo $t \in I$ se verifica que $U(t,y^k)$ converge a $U(t,x)$, por continuidad. Luego, por el teorema de Egoroff, existe $S'' \subset S'$, con $\mu(S'') > \mu(S') - \frac{\varepsilon}{2}$, tal que $U(t,y^k)$ converge a $U(t,x)$, uniformemente para todo $t \in S''$. Se deduce entonces que existe $k_0$ tal que para todo $k \geq k_0$ se verifica que $\mid U(t,y^k) - U(t,x) \mid \leq \frac{\alpha}{2}$, para todo $t \in S''$. Luego $U(t,y^k) < U(t,x)$ para todo $t \in S''$, para todo $k \geq k_0$, y además $\mu(S'') > \mu(S) - \varepsilon > 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$. Pero esto está en contradicción con $y^k \succeq_i^n x$ para todo $k$.

**Observaciones.** Podría pensarse que la definición establecida de preferencia mayotitaria exige demasiado para poder concluir que un consumo es "mayoritariamente" preferido a otro. De hecho, uno puede pensar en otras definiciones posibles de preferencias mayoritarias. Por ejemplo, sería menos exigente decir que $x \succ_i^n y$ si y sólo si $\mu\left(P_{x,y}^{i,n} \bigcup I_{x,y}^{i,n}\right) \geq 2^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$ y además $\mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) > 0$. Sin embargo, esta definición no es correcta. En efecto, puede ocurrir que $\mu\left(I_{x,y}^{i,n}\right) = \frac{4}{5}\mu\left(I_i^n\right)$ y $\mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) = \mu\left(P_{y,x}^{i,n}\right) = 10^{-1}\mu\left(I_i^n\right)$. Se tendría entonces que $x \succ_i^n y$ y también $x \prec_i^n y$. Por tanto, esta relación de preferencias no está bien definida.

Una definición alternativa de preferencia mayoritaria puede ser la siguiente

$$x \succeq_i^n y \;\Leftrightarrow\; \mu\left(P_{x,y}^{i,n} \bigcup I_{x,y}^{i,n}\right) \geq \mu\left(P_{y,x}^{i,n} \bigcup I_{x,y}^{i,n}\right)$$

Con esta definición alternativa, la preferencia estricta y la indiferencia vendrían dadas por

$$x \succ_i^n y \;\Leftrightarrow\; \mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) > \mu\left(P_{y,x}^{i,n}\right)$$

$$x \sim_i^n y \;\Leftrightarrow\; \mu\left(P_{x,y}^{i,n}\right) = \mu\left(P_{y,x}^{i,n}\right)$$

En este caso las preferencias $\succeq^n$ son completas y pero no transitivas. De hecho, $x \succ_i^n z$ y $z \succ_i^n$ no garantiza que $x \succ_i^n y$. Más aún, $x \sim^n z$ y $z \sim_i^n y$ no garantiza $x \sim_i^n y$.

# Referencias


[1] AUMANN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 34, 1-17.

[2] AUMANN, R.J. (1966): "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[3] BEWLEY, T. (1972): "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities." *Journal of Economic Theory*, 4, 514-540.

[4] DEBREU, G., SCARF, H. (1963): "A Limit theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review*, 4, 235-246.

[5] EDGEWORTH, F.Y. (1881): *Mathematical Psychics.* London: Paul Kegan.

[6] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Economic Theory*, 3, 577-584.

[7] GRODAL, B. (1972): "A Second Remark on the Core of an Atomless Economy." *Económetrica*, 40, 581-583.

[8] HÜSSEINOV, F. (1987): "On Jensen's inequality." Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 41, 798-806.

[9] JONES, L. (1983): "Existence of Equilibria with Infinitely Many Consumers and Infinitely Many Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 12 119-138.

[10] KANNAI, Y. (1970): "Continuity Properties of the Core of a Market." *Econometrica*, 38, 791-815.

[11] KANNAI, Y. (1972): "Continuity Properties of the Core of a Market: A Correction." *Econometrica*, 40, 955-958.

[12] KEHOE, T., LEVINE, D., MAS-COLELL, A., ZAME, W. (1989): "Determinacy of Equilibrium in Large-Scale Economies." *Journal of Mathematical Economics*, 18, 231-262.

[13] MAS-COLELL, A. (1975): "A Model of Equilibrium with Differentiated Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 2, 263-295.

[14] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[15] RUSTICHINI A.,YANNELIS N.C. (1991): "Edgeworth's Conjecture in Economies with a Continuum of Agents and Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 20, 307-326.

[16] RUSTICHINI A.,YANNELIS N.C. (1992): "Commodity Pair Desirability and the Core Equivalence Theorem." En *General Equilibrium Growth and Trade* II. Academic Press, New York, London.

# Capítulo IV

# Coaliciones y competencia perfecta

# 1 Introducción

En economías de intercambio puro, con un número finito de consumidores, los agentes individuales pueden manipular el mecanismo competitivo en su propio beneficio. Es decir, en economías finitas los agentes individuales, y por tanto las coaliciones de agentes, tienen incentivos a declarar características distintas de las reales que mejoran su utilidad indirecta. Se sabe también (Roberts y Postlewaite (1976)) que en economías de intercambio, donde no se consideran bienes públicos, el incentivo individual a desviarse de un comportamiento precio-aceptante decrece conforme aumenta el número de agentes. El objetivo de este trabajo es obtener resultados en un marco más general, que no se concentre únicamente en acciones individuales y que considere estrategías colectivas. Ello nos permitirá estudiar propiedades del mecanismo competitivo referentes a incentivos coalicionales. Concretamente, formalizamos tests de competencia perfecta en términos de los incentivos que la s coaliciones tienen para desviarse de un comportamiento precio-aceptante en función de su tamaño.

En el marco de la Teoría de Juegos, Hurwicz (1972) introduce el término compatibilidad de incentivos. Los agentes económicos son los jugadores y las características declaradas (preferencias, dotaciones iniciales o tecnologías) son las variables estratégicas. Cuando se juega una estrategia se caracteriza un entorno económico, y el mecanismo en consideración determina una asignación resultante. Esta asignación, evaluada con las preferencias reales de cada consumidor, es el pago asociado a la estrategia jugada. Hurwicz dice que el mecanismo es compatible en incentivos individualmente si el vector de características reales es un equilibrio de Nash del juego. Utilizando el marco y el lenguaje de la Teoría de Juegos, considera una economía de intercambio con dos consumidores y dos mercancías, y prueba que si un consumidor falsifica sus preferencias puede manipular la formación de precios de equilibrio y obtener beneficios. Este resultado es generalizado por Otani y Sicilian (1982) para el caso de más consumidores o más mercancías. Postlewaite (1979) y Thomson (1979) prueban resultados análogos, referentes a falsificación de recursos. Más aún, Dasgupta, Hammond y Maskin (1979) prueban que con un número finito de agentes no existe ningún mecanismo de asignación que sea compatible en incentivos y óptimo de Pareto.

En vista de estos resultados negativos, y dado que la literatura de compatibilidad de incentivos consiste, en su mayoría, en resultados de imposibilidad, se plantean soluciones de tipo "second-best", que hacen referencia al grado de manipulación del mecanismo competitivo. Por ejemplo, se estudian cuestiones límites sobre qué sucede cuando aumenta el número de agentes de una economía. Este tipo de análisis tiene el interés añadido de que, desde el punto de vista de los incentivos, las diferencias notables entre bienes públicos y privados se manifiestan solamente al aumentar el número de agentes, y analizar el efecto que ello produce sobre los incentivos a una revelación sincera. (Véase Roberts (1974)). No obstante, en este trabajo nos centramos en economías de intercambio puro, sin bienes públicos, para estudiar problemas de incentivos coalicionales, referentes al grado de manipulación del mecanismo competitivo.

Los resultados obtenidos por Hurwicz (1979), Thomson (1979), Roberts (1980), y Otani y Sicilian (1990), entre otros, muestran que el conjunto de asignaciones de equilibrio de Nash de un juego de mercado (considerando como estrategias recursos, preferencias o demandas), puede estar lejos del conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano, independientemente del número de agentes. Por ello, estamos interesados en propiedades límites de compatibilidad de incentivos coalicionales del mecanismo competitivo desde un punto de vista genérico.

Roberts y Postlewaite (1976) prueban que el incentivo individual a desviarse de un comportamiento precio-aceptante converge a cero a medida que el número de agentes aumenta mediante réplicas, o bien si la sucesión de economías converge a una economía donde la correspondencia de precios de equilibrio sea continua.

Roberts (1980) utiliza también las técnicas de replicación de Debreu y Scarf (1963) para estudiar los puntos límites de equilibrios monopolísticamente competitivos. Con un análisis similar al utilizado por Gabszewicz y Vial (1972), pero con hipótesis menos restrictivas, prueba que, si los equilibrios perfectamente competitivos no son críticos (lo que ocurre genéricamente), entonces son puntos límite de equilibrios monopolísticamente competitivos.

Safra (1985) considera juegos de manipulación del equilibrio walrasiano vía dotaciones iniciales (sin destrucción), donde los agentes pueden declarar falsos recursos y añadir lo que ocultan a la asignación walrasiana resultante. Prueba que en economías con un número de agentes suficientemente grande existe equilibrio de Nash y que, bajo determinadas condiciones de regularidad la sucesión de asignaciones de equilibrio de Nash converge a las asignaciones walrasianas.

Los resultados previamente citados pueden interpretarse en términos de compatibilidad de incentivos de los individuos, sin considerar desviaciones de coaliciones. Roberts y Postlewaite (1976) señalan, de hecho, que la concentración en acciones individuales es, precisamente, el punto débil de esta línea de trabajo. Como ya se ha señalado, el objetivo fundamental de este trabajo es considerar comportamientos estratégicos de las coaliciones, y estudiar propiedades límites del mecanismo competitivo en términos de incentivos coalicionales. La intención no es más que obtener una justificación, distinta a las usuales, del supuesto competitivo en economías continuas y, por tanto, del acierto de denominarlas economías perfectamente competitivas.

Desde que Aumann (1964) introdujo un modelo de equilibrio general en una economía continua, la idea de competencia perfecta ha sido asociada a la no existencia de átomos en el espacio de los agentes. Ostroy y Zame (1994) muestran que si el espacio de mercancías es de dimenensión infinita, la hipótesis de no existencia de átomos difiere de la hipótesis de competencia perfecta. La distinción se basa en lo que ellos denominan "espesor" o "grosor" de la economía. Sugieren como test de competencia perfecta el hecho de que la manipulación de precios por grupos de agentes, vía falsificación de recursos, sea tan pequeña como se quiera si el tamaño de las coaliciones es arbitrariamente pequeño. Este test, que denominan test de withholding, es un modo de justificar la competencia perfecta que está en la línea de la justificación que proporciona la relación entre equilibrios no cooperativos y equilibrios walrasianos (véase, por ejemplo, Gabszewicz y Vial (1972); Roberts y Postlewaite (1976); Novshek y Sonnenschein (1978); Dubey, Mas-Colell y Shubik (1980)). Otra justificación alternativa es aportada por la literatura sobre la relación entre el Núcleo y las asignaciones de equilibrio competitivo (véase Edgeworth (1881); Shubik (1959); Debreu y Scarf (1963); Aumann (1964)), y nos referiremos a ella como test de equivalencia Core-Walras. Se sabe que en economías sin átomos definidas sobre un espacio de mercancías finito-dimensional, el Núcleo coinciden con el conjunto de asignaciones walrasianas. Más aún, basta considerar el veto de un subconjunto del conjunto total de coaliciones (el veto de coaliciones pequeñas) para eliminar los estados que no son perfectamente competitivos. (Véase Schmeidler (1972) y Moreno y Hervés (1996)). El concepto de Núcleo es un concepto de equilibrio cooperativo que no requiere el uso de los precios. Si suponemos que el intercambio en una economía es guiado por precios que los agentes individuales o las coaliciones de agentes van a intentar manipular, deberíamos poder obtener alguna propiedad del mecanismo competitivo, en términos del grado de manipulación o en términos de incentivos coalicionales, para poder concluir que la economía es perfectamente competitiva. Por ello, en este trabajo, formalizamos tests de competencia perfecta que consideran comportamientos estratégicos coalicionales, y que denominamos tests de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Esta denominación se debe a que este tipo de tests aportan una justificación de la competencia perfecta en términos del grado de manipulación de los precios por grupos de agentes, y en términos de medidas de incentivos coalicionales, en función del tamaño de las coaliciones.

En el artículo ya citado de Ostroy y Zame se prueba que, si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, existen economías con un continuo de agentes que no superan el test de equivalencia Core-Walras ni el test de withholding. Concretamente, prueban que existe una familia de preferencias y un conjunto abierto de asignaciones iniciales que definen economías, cuyos equilibrios walrasianos no superan ninguno de los dos tests de competencia perfecta. Además, hacen ver que las mismas condiciones de "grosor" de los mercados, que conducen a la equivalencia Core-Walras, garantizan la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio. De hecho, muestran que las economías que consideran tienen la propiedad de que si superan uno de los tests de competencia perfecta, también superan el otro, al menos genéricamente.

Estos resultados conducen a preguntarse si, en el caso finito-dimensional, el test de equivalencia Core-Walras es equivalente al test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Más aún, nos preguntamos si cualquiera de estos tests de competencia perfecta son una caracterización de las economías perfectamente competitivas. Por ejemplo, el hecho de que una economía verifique que el veto de coaliciones pequeñas elimine los estados que no son de equilibrio competitivo, ¿permite concluir que dicha economía supera cualquiera de los tests de competencia perfecta a que hemos hecho referencia?. Es decir, cabe preguntarse si un resultado análogo se mantiene en cualquier economía perfectamente competitiva (economías "espesas", física o económicamente). Esto es, si en economías continuas que no son "espesas" (thin market economies) no es cierto que sea suficiente considerar el veto de coaliciones pequeñas para obtener los estados del núcleo y de equilibrio.

Como ya se ha señalado, se definen aquí tests de competencia perfecta en términos de los incentivos que pueden tener las coaliciones a adoptar un comportamiento estratégico, desviándose de un comportamiento precio-aceptante para manipular la formación de precios de equilibrio en su propio beneficio. Los resultados que se obtienen, ponen de manifiesto que, en el caso finito-dimensional, el problema de la competencia perfecta se resuelve al considerar un continuo de agentes, en el sentido de que los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no son manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños. En este trabajo, consideramos que el incentivo de una coalición a desviarse de un comportamiento precio-aceptante es medido bien por el incremento medio de utilidad indirecta que puedan conseguir los agentes que la forman o bien por el incremento agregado de ésta. Probamos que para un conjunto genérico de economías continuas, definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita, el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo puede ser despreciado si el tamaño de la coalición es arbitrariamente pequeño. Los resultados establecidos para economías continuas admiten interpretaciones discretas que conducen a resultados límites sobre compatibilidad de incentivos coalicionales para sucesiones de economías finitas, generalizando los resultados obtenidos por Roberts y Postlewaite.

El resto de esta nota se organiza como sigue. La sección 2 contiene notaciones y definiciones. Se formaliza un test de competencia perfecta, que denominamos test de compatibilidad de incentivos coalicionales. En la sección 3 se considera una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distingue un número finito de consumidores distintos. Probamos que en estas economías continuas de $m$ tipos el incentivo de cualquier coalición a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. Algunos resultados de García-Cutrín y Hervés (1993) nos permiten establecer, en la sección 4, una interpretación discreta para economías réplicas. En la sección 5 introducimos un concepto de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite en sentido fuerte. Probamos que el mecanismo competitivo satisface este tipo de compatibilidad en un conjunto residual de economías. Este resultado admite una interpretación discreta para sucesiones de economías descritas vía medidas simples, que establecemos en la sección 6. En la sección 7 consideramos un test de competencia perfecta más particular, considerando como estrategias únicamente recursos. La sección 8 contiene comentarios y observaciones finales.

# 2 Notación y definiciones

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. El espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$ representa los agentes que constituyen $\mathcal{E}$, siendo $I$ el conjunto de agentes y $\mu$ una medida sobre la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos medibles. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t \subset X$, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \to \mathbb{R}$ continua.

Sea $P$ el simplex de $\mathbb{R}^\ell_+$. Denotemos por $C_t$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$. Esto es, para cada $p \in P$ $C_t(p) = \{z \in \mathbb{R}^\ell | z + \omega_t$ maximiza $U_t$ sobre $B_t(p)\}$, siendo $B_t(p) = \{x \in X_t | px \leq \omega_t\}$ la restricción presupuestaria del agente $t \in I$ cuando $p$ es el sistema de precios que prevalece. Son bien conocidas condiciones suficientes para que $C_t(p) \neq \emptyset$. Obsérvese que $C_t(p)$ es cerrado para todo agente $t \in I$ y para todo sistema de precios $p \in P$. Se dice que el sistema de precios $p \in P$ es de equilibrio competitivo en la economía $\mathcal{E}$ si $0 \in \int_I C_t(p) d\mu(t)$. Denotemos por $\Pi(\mathcal{E})$ el conjunto de precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$. Nótese que para determinar $\Pi(\mathcal{E})$ basta conocer las correspondencias de respuesta competitiva $C_t$ para cada agente $t \in I$.

Una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}$ es un conjunto medible $S \subset I$, tal que $\mu(S) > 0$. Estamos interesados en estudiar propiedades de incentivos coalicionales del comportamiento competivo o precio-aceptante. Para ello, consideramos que los agentes pueden declarar otras correspondencias de respuesta a los precios diferentes de la competitiva $C_t$. Así pues, denotemos por $\Theta_t$ el conjunto de estrategias que el agente $t \in I$ puede utilizar para desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Para cada $t \in I$ se define $\Theta_t$ como el siguiente conjunto de correspondencias de $P$ en $\mathbb{R}^\ell$

$$\begin{aligned} \Theta_t = \{ \quad Z : P \to \mathbb{R}^\ell \ | \ & \text{Para cada } \ p \in P \ \text{ se verifica que } \ Z(p) + \omega_t \subset X_t \\ & \text{y,} \quad p\theta \leq 0 \ \text{ cualquiera que sea } \ \theta \in Z(p)\} \end{aligned}$$

Por ejemplo, las estrategias de un agente $t \in I$ pueden consistir en las correspondencias de exceso de demanda competitivas resultantes de declarar preferencias definidas por $U'_t$ en vez de $U_t$ y recursos iniciales $\omega'_t \leq \omega_t$. Un caso particular es el considerado por Hurwicz (1972) donde las estrategias consideradas son únicamente preferencias.

Un perfil de estrategias es una aplicación $\Theta : I \to \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, tal que $\Theta(t) = \Theta_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in I$. Sea $S \subset I$ una coalición de agentes de la economía $\mathcal{E}$. Un perfil de estrategias para la coalición $S$ es una aplicación $\Theta^S : S \to \bigcup_{t \in S} \Theta_t$ tal que $\Theta^S(t) = \Theta^S_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in S$. Decimos que un sistema de precios $p \in P$ es alcanzable por la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, si existe un perfil de estrategias $\Theta^S$ para la coalición $S$ tal que $0 \in \int_{I \setminus S} C_t(p) d\mu(t) + \int_S \Theta_t^S(p) d\mu(t)$. Es decir, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ entonces existen $z_t \in C_t(p)$, para cada $t \notin S$ y $\theta_t \in Z_i(p)$, para cada $t \in S_i$, con $Z_i \in \Theta_i$, tales que $0 = \int_{I \setminus S} z_t d\mu(t) + \int_S \theta_t d\mu(t)$. Decimos entonces que $x^S : S \to \bigcup_{t \in S} X_t$, con $x^S(t) = \theta_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $x^S \in X(S, \mathcal{E})$.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de coaliciones en la economía $\mathcal{E}$ . Definamos $\Pi(\mathcal{S}, \mathcal{E}) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \Pi(S, \mathcal{E})$. Nótese que si $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, entonces $\Pi(\mathcal{S}', \mathcal{E}) \subset \Pi(\mathcal{S}, \mathcal{E})$. En particular, $\Pi(\mathcal{E}) \subset \Pi(S, \mathcal{E}) \subset \Pi(I, \mathcal{E})$ cualquiera que sea la coalición $S \subset I$.

**Definición** 2.1 *Decimos que la respuesta competitiva es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en la economía $\mathcal{E}$ si para cualquier coalición $S \in \mathcal{S}$ y cualquier $x \in X(S, \mathcal{E})$ existe una asignación competitiva $x^*$ tal que $U_t(x_t^*) \geq U_t(x_t)$, para casi todo $t \in S$.*

**Observaciones.** Si $\mathcal{S}$ es el conjunto de coaliciones formados por un sólo agente, entonces la definición 2.1 coincide con la noción de compatibilidad de incentivos individual establecida por Roberts y Postlewaite (1976). En este caso, si la respuesta competitiva no es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos, entonces declarar la verdadera demanda no es perfil de equilibrio Cournot-Nash en el sentido de Otani y Sicilian (1982).

Se sabe que en economías con un número finito de agentes hay incentivos a no adoptar un comportamiento precio-aceptante. Si un agente se comporta estratégicamente, puede manipular la formación de precios en su propio beneficio. Es decir, el mecanismo competitivo no es compatible en incentivos individualmente y, por tanto, tampoco es compatible en incentivos coalicionalmente. En economías continuas un agente individual (o un conjunto de agentes de medida nula) no influye en la formación de precios por un cambio de comportamiento. Sin embargo, si una coalición actúa estratégicamente puede modificar los precios de equilibrio en beneficio de todos los individuos que la constituyen. Por otra parte, si consideramos el juego de mercado asociado a una economía con un continuo de agentes, entonces los equilibrios de Nash de dicho juego conducen a los equilibrios walrasianos de la economía, y recíprocamente (véase Moreno y Hervés (1994)).

A pesar de que en economías sin átomos las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. De hecho, para concluir que una economía continua es perfectamente competitiva deberíamos poder decir que tiene la propiedad de que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Interpretamos esta propiedad como un test de competencia perfecta, y nos referiremos a él como test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. A continuación formalizamos dicho test.

**Definición** 2.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$ si para cualquier sucesión de coaliciones $(S_n) \subset I$, con $\mu(S_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$, tal que para todo $n \geq \bar{n}$ se tiene lo siguiente. Si $x^n \in X(S_n, \mathcal{E})$ entonces existe $x$ asignación competitiva de $\mathcal{E}$ tal que $U_t(x(t)) > U_t(x^n(t)) - \varepsilon$, para casi todo $t \in S_n$.*

**Definición** 2.3 *Decimos que la economía sin átomos $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales si mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$ .*

La interpretación de la definición de compatibilidad coalicional en el límite es la siguiente. Consideremos que el incentivo de una coalición a comportarse no competitivamente viene dado por la ganancia agregada de utilidad (o si se quiere por la ganancia media) que los agentes que la forman pueden conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Entonces, si el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite, se tiene que el incentivo de cualquier coalición $S \subset I$ a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. En este caso, diremos que la economía supera el test de competencia perfecta que hemos denominado test compatibilidad de incentivos coalicionales.

# 3 Compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en economías continuas de $m$ tipos de agentes

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ con un continuo de agentes, y definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. Los agentes que constituyen $\mathcal{E}$ vienen representados por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0, 1]$ el conjunto de agentes, $\mathcal{A}$ la $\sigma$-álgebra de conjuntos medibles y $\mu$ la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{A}$. A pesar de que la economía esté formada por un continuo de agentes, consideramos que el observador tiene una capacidad limitada y sólo distingue un número finito de tipos distintos. Así, el intervalo real $[0,1]$ está dividido en $m$ subintervalos disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales representa un tipo de agente. Esto es, $I = \bigcup_{i=1}^m I_i$, donde $I_i = [q_{i-1}, q_i)$, si $i \neq m$, $I_m = [q_{m-1}, 1]$; con $q_0 = 0, q_i \in \mathbb{Q}$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$. La medida $\mu(I_i)$ de cada subintervalo $I_i$ representa el peso relativo que los agentes de tipo $i$ tienen en la economía.

**Observación.** Nótese que estamos considerando subintervalos de extremos racionales. Por tanto, podemos escribir $q_i = \frac{a_i}{q}$, con $a_i, q \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$. De este modo, podemos considerar que el intervalo $I = [0,1]$ está dividido en $q$ subintervalos de igual longitud, con $q \geq m$. En este caso puede suceder que subintervalos distintos represententes tipos idénticos. Por ello, aunque los subintervalos que representan diferentes tipos no tengan por qué ser de la misma longitud, por simplicidad suponemos que $I_i = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$, si $i \neq m$, $I_m = \left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$.

Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t \subset X$ cerrado y convexo, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \to \mathbb{R}$ continua y cuasi-cóncava. Como en la economía $\mathcal{E}$ sólo distinguimos un número finito $m$ de agentes distintos, se tiene que las características de cada consumidor $t \in I$ vienen dadas por $X_t = X_i$, $\omega_t = \omega_i$, y $U_t = U_i$, si $t \in I_i$, siendo $I_i$ el conjunto de agentes de tipo $i$.

Consideramos que agentes pueden actuar estratégicamente. Así, para cada $t \in I$, el conjunto de estrategias $\Theta_t$, viene dado por $\Theta_t = \Theta_i$, si $t \in I_i$.

Siguiendo la notación utilizada en la sección anterior, $\Theta_i$ es el siguiente conjunto de correspondencias de $P$ en $\mathbb{R}^\ell$

$$\begin{aligned}\Theta_i = \{ \quad Z : P \to \mathbb{R}^\ell \ & \mid \text{Para cada } \ p \in P \ \text{ se verifica que } \ Z(p) + \omega_i \subset X_i \\ & \ \ \text{y,} \quad p\theta \leq 0 \ \text{ cualquiera que sea } \ \theta \in Z(p)\}\end{aligned}$$

Denotemos por $C_i$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva de los agentes $t \in I_i$, esto es, de los agentes de tipo $i$.

Como hemos señalado, aunque en economías continuas las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. En efecto, el objetivo central de esta sección es demostrar que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Esto es, se trata de probar que las economías continuas de $m$ tipos de agentes superan el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

Para comprobar la compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite del mecanismo competitivo, establecemos algunos resultados previos, donde utilizaremos la notación que sigue. Dada una coalición $S$, denotamos $S^i = S \bigcap I_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Definimos $J_S = \{i \in \{1, \ldots, m\} | \mu(I_i \setminus S^i) = 0\}$, y $H_S = \{i \in \{1, \ldots, m\} | \mu(S^i) > 0\}$.

**Lema 3.1** *Si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ para alguna coalición $S \in \mathcal{A}$, entonces $p$ es alcanzable por $S$ vía una estrategia común para todos los agentes del mismo tipo.*

*Demostración.* Sea una coalición $S \subset I$ y sea $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$. Veamos que entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_S$ y existen $\theta_i \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_i$, para cada

$t \in S^i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m (\mu(I_i) - \mu(S^i)) z_i + \sum_{i=1}^m \mu(S^i)\theta_i$. Como $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ se tiene que existen $z_t \in C_t(p)$, para cada $t \in I \setminus S$ y existen $\theta_t \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_t$, para cada $t \in S$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m \int_{I_i \setminus S^i} z_t d\mu(t) + \sum_{i=1}^m \int_{S^i} \theta_t d\mu(t)$. Defininamos $z_i = \frac{1}{\mu(I_i \setminus S^i)} \int_{I_i \setminus S^i} z_t d\mu(t)$ para cada $i \notin J_S$, y $\theta_i = \frac{1}{\mu(S^i)} \int_{S^i} \theta_t d\mu(t)$ para cada $i \in H_S$. Por construcción de $\theta_i$ y por definición de los conjuntos de estrategias, se tiene que $\theta_i \in \Theta_i$, para todo $i$. Basta ahora probar que para cualquier tipo $i$ se verifica que $z_i \in C_i(p)$. Supongamos que no sucede así. Por construcción $pz_i \leq 0$ para todo $i$. Luego, si $z_i \notin C_i(p)$ para algún tipo $i$, entonces existe $x$ tal que $px \leq p\omega_i$ y $x \succ_i z_i + \omega_i$. Consideremos el conjunto $A = \{y \in X_i | y \succeq_i x\}$. Nótese que $z_t + \omega_i \in A$, para todo $t \in I_i \setminus S^i$. Teniendo en cuenta que los conjuntos de consumo son convexos y cerrados y las preferencias continuas y convexas, se deduce $A$ es cerrado y convexo. Por otra parte, se tiene que $z_i + \omega_i \in co(z + \omega(I_i \setminus S^i))$. Luego $z_i + \omega_i \in A$, lo que contradice que $x \succ_i z_i + \omega_i$. En consecuencia, para todo $i$ se tiene que $z_i \in C_i(p)$. Esto permite concluir que, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, entonces $p$ es alcanzable por la coalición $S$ vía un perfil de estrategias $\Theta^S$ constante en tipos.

Q.E.D.

**Corolario 3.1** *Sean las coaliciones $S, S' \subset I$, verificando $\mu(S^i) \leq \mu(S'^i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $\Pi(S, \mathcal{E}) \subset \Pi(S', \mathcal{E})$.*

*Demostración.* Basta tener en cuenta que la correspondencia de exceso de demanda $C_i$ de los agentes de tipo $i$ pertenece a su conjunto de estrategias $\Theta_i$ cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, y aplicar el lema anterior.

Q.E.D.

**Lema 3.2** *Para cada sucesión de coaliciones $(S_n)$, tal que $\mu(S_n)$ converge a cero, existe una sucesión de coaliciones $(S'_n)$, tal que $\mu(S'_n)$ converge a cero y además $\Pi(S_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo $n$.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que $\mu(S_n) \to 0$, definamos la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue. Dado $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(k)$ es un entero positivo, tal que para todo $n \geq \sigma(k)$ se verifica $\mu(S_n^i) \leq \frac{1}{m+k}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Además $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, para todo $k$. Tomamos $S'_n = \bigcup_{i=1}^m S_n'^i$, con $S_n'^i = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i-1}{m} + \frac{1}{m+k}\right)$, si $\sigma(k) \leq n < \sigma(k+1)$. Por construcción $\mu(S'_n)$ converge a cero y para cada $n$ se verifica $\mu(S_n^i) \leq \mu(S_n'^i)$ y $\mu(S_n'^i) \leq \mu(S_{n+1}'^i)$, cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, $\Pi(S_n, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$ y $\Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo $n$.

Q.E.D.

**Lema 3.3** *Sean $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, m$, conjuntos cerrados y acotados inferiormente de $\mathbb{R}^\ell$, y $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m_{++}$ cualquier cerrado de $\mathbb{R}^m$. Entonces, la correspondencia $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^\ell$, definida por $F(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{C}_i$, es cerrada.*

*Demostración.* Consideremos la sucesión $(\alpha^n, z^n)$, tal que $z^n \in F(\alpha^n)$ para todo $n$, $(\alpha^n)$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}^m_{++}$ y $(z^n)$ converge a $z \in \mathbb{R}^\ell$. Veamos que $z \in F(\alpha)$. En efecto, $z^n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n c_i^n$, con $c_i^n \in \mathcal{C}_i$, para todo $n$. Luego para cualquier $h \in \{1, \ldots, \ell\}$ se tiene que $(c_k^n)_h = \frac{z_h^n}{\alpha_k^n} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{\alpha_i^n}{\alpha_k^n}(c_i^n)_h$. Como los conjuntos $\mathcal{C}_i$ están acotados inferiormente, la sucesión $(\alpha^n, z^n)$ está acotada, y $\alpha >> 0$, se deduce entonces que la sucesión $(c_i^n)$ está en un compacto, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto, existe una subsucesión $(c_i^{n_k})$ convergente a $c_i \in \mathcal{C}_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se concluye entonces que $z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i$, y por tanto $z \in F(\alpha)$.

Q.E.D.

**Observaciones.**

1. Nótese que en el lema puede sustituirse $\mathbb{R}^\ell_{++}$ por $-\mathbb{R}^\ell_{++}$.

2. Si alguna coordenada de $\alpha$ es cero, entonces el lema puede no ser cierto. Por ejemplo, consideremos $\mathcal{C}_1 = [1, \infty) \times \{0\}$ y $\mathcal{C}_1 = \{0\} \times [1, \infty)$. Se tiene que $(1,1) \in F\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right)$, para todo $n$, y sin embargo, $(1,1) \notin F((0,1)) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 1\}$. Por tanto, en este caso $F$ no es cerrada en ningún entorno de $\alpha = (0,1)$. Más aún, nótese que la correspodencia $F$ no tiene grafo cerrado en ningún entorno de $(x,y) \in Fr(\mathbb{R}^2_+$, donde $Fr(\mathbb{R}^2_+$ denota la frontera de $\mathbb{R}^2_+$.

3. Señalar también que bajo las condiciones del lema, e incluso añadiendo el supuesto de convexidad de los conjuntos $\mathcal{C}_i$, $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ no tiene por qué ser cerrada. En efecto, sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ los conjuntos cerrados, acotados inferiormente y convexos, definidos por $\mathcal{C}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1,\ y \geq x + \frac{1}{x}\right\}$, $\mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x - \frac{1}{x}\right\}$, y sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(\alpha) = \alpha_1 \mathcal{C}_1 + \alpha_2 \mathcal{C}_2$. Tomemos $\alpha^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}, -1 + \frac{1}{n^2}\right)$. La sucesión $(\alpha^n)$ converge a $(1,-1)$. Por otra parte $z^n = \left(\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right) \in F(\alpha^n)$ para todo $n$, y $(z^n)$ converge a $(0,0)$. Sin embargo, $(0,0) \notin F(1,-1)$, ya que $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.

4. Nótese que la suma de cerrados no es, en general, un conjunto cerrado. La acotación inferior de que los conjuntos $\mathcal{C}_i$ es pues, necesaria para garantizar que la correspondencia $F$ tome valores cerrados.

5. Por otra parte, observése que la correspondencia $F$ no tiene por qué ser semicontinua superiormente. Para ello, considérese $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(\alpha) = \alpha_1 \mathcal{C}_1 + \alpha_2 \mathcal{C}_2$,siendo $\mathcal{C}_1 = [1, \infty) \times \{0\}$ y $\mathcal{C}_1 = \{0\} \times [1, \infty)$. Veamos que $F$ no es semicontinua superiormente en $(1,1)$. En efecto, sea

$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{x}{1+x} < y,\ x > 0\right\} \bigcap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{y}{1+y} < x,\ y > 0\right\}$. $U$ es entorno de $F(1,1) = [1,\infty) \times [1,\infty)$, y para cualquier entorno $V$ de $(1,1)$ se verifica que $F(\alpha') \bigcap U^c \neq \emptyset$, con $\alpha' \in V$. Más aún, análogamente se prueba que $F$ no es semicontinua superiormente en ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

**Lema 3.4** *Supongamos que para cada $i$ los conjuntos de consumo $X_i$ son acotados inferiormente y que dado $p = (p_1, \ldots, p_\ell) \in P$ se verifica que $p_h = 0 \Rightarrow z_h > 0$ para todo $z \in C_i(p)$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $(S_n)$ una sucesión de coaliciones, tal que $\mu(S_n)$ converge a cero. Si $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$, para todo $n \geq n_0$, entonces $p \in \Pi(\mathcal{E})$.*

*Demostración.* Supongamos que $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$ para todo $n \geq n_0$ y $p \notin \Pi(\mathcal{E})$. Entonces, para cada $n \geq n_0$ existen $z_i^n \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_{S_n} = J_n$, y $\theta_i^n \in Z_i(p)$, con $Z_i \in \Theta_i$, para cada $i \in H_{S_n} = H_n$, tales que $0 = \sum_{i \notin J_n} \frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)} z_i^n + \sum_{i \in H_n} \frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \theta_i^n$. Sea $a \in \mathbb{R}^\ell$ una cota inferior para todo $X_i$. Podemos suponer $a \leq 0$. Se deduce entonces que $\sum_{i \in H_n} \mu(S_n^i) \theta_i^n \geq \sum_{i \in H_n} \mu(S_n^i)(a - \omega_i)$. Consideremos una sucesión de números reales $(k_n)$ tal que para todo $n$ se verifica $\frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \leq \frac{1}{k_n}$ para todo $i$, y $k_n \to \infty$. Tomando $h^n = -\left(\sum_{i \notin J_n} \frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)} z_i^n\right)$, se tiene que $h^n \geq \sum_{i \in H_n} \frac{1}{k_n}(a - \omega_i)$.

Definamos la siguiente correspondencia $F$. Dado $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $F(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(p)$. $0 \notin F(1)$, pues $p \notin \Pi(\mathcal{E})$. Por el lema 3.3 se tiene que $F$ tiene grafo cerrado en cualquier entorno $U$ de $1 \in \mathbb{R}^m$, que esté contenido en $\mathbb{R}^m_{++}$. Por tanto, existe $n^*$, tal que para todo $n > n^*$ se verifica $0 \notin F(\alpha_n)$, siendo $\alpha_n = \left(\frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)}\right)_{i=1}^m$. Más aún, como $h^n \in F(\alpha_n)$ y $(\alpha_n)$ converge a $1 \in \mathbb{R}^m$, la sucesión $h^n$ no puede converger a cero.

Sea $B = \{h \in \{1, \ldots, \ell\} | p_h = 0\}$. Si $B \neq \emptyset$, entonces, por hipótesis, $(z_i^n)_h > 0$, para todo $h \in B$, para todo $n$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. De la desigualdad $k_n h^n \geq \sum_{i \in H_n}(a - \omega_i)$ para todo $n$, se deduce que $(z_i^n)_h$ converge a cero, para todo $h \in B$, todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego $(h^n)_h$ converge a cero, para todo $h \in B$. Por otra parte se tiene que $ph^n = 0$ para todo $n$. Esto implica que la sucesión $(h^n)$ converge a cero, lo que está en contradicción con el carácter cerrado de $F$.

Supongamos ahora $B = \emptyset$, esto es $p >> 0$. Veamos que entonces que alguna componente de $h^n$ es estrictamente negativa. Supongamos que no es así, es decir, supongamos $p >> 0$ y $h^n \geq 0$. Como los conjuntos de consumo son acotados inferiormente se deduce entonces que $-h^n \geq \sum_{i=1}^m (a - \omega_i)$. Luego, $-h^n$ tiene alguna subsucesión convergente a $h$ y $h \neq 0$, pues $0 \notin F(1)$. Por otra parte, $-h^n = \sum_{i \in H_n} \frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \theta_i^n$, y $\mu(S_n^i) \to 0$, para todo $i$. Esto implica que existe $i$ tal que la sucesión $(\theta_i^n)$ no está acotada en alguna componente $k$. Pero esto contradice el que $p\theta_i^n \leq 0$ para todo $n$ y para todo $i$. Luego, en efecto, $h^n$ tiene alguna componente negativa para todo $n > n^*$. Para cada $n > n^*$ sea $j(n)$ tal que $h^n_{j(n)} < 0$. Pero como $k_n h^n_{j(n)} \geq \left(\sum_{i \in H_n}(a-\omega_i)\right)_{j(n)}$, y $k_n h^n_{j(n)} < 0$ para todo $n \geq n^*$, se deduce que la sucesión $h^n_{j(n)}$ converge a cero. Por tanto, la sucesión cuyo $n$-ésimo término es la coordenada menor de $h^n$ converge a cero. Como $ph^n = 0$ para todo $n$ y $p >> 0$, se obtiene que $(h^n)$ converge a $0 \in \mathbb{R}^\ell$. Esto contradice el que $F$ sea cerrada. La contradicción proviene de haber supuesto que $p \notin \Pi(\mathcal{E})$.

Q.E.D.

El siguiente lema establece condiciones suficientes para que el conjunto de precios alcanzables por una coalición sea un conjunto cerrado. Para ello, denotemos $P^* = \{p \in P | \int_I C_t(p) d\mu(t) \neq \emptyset\}$.

**Lema** 3.5 *Supongamos que la economía $\mathcal{E}$ verifica*

*(i) $X_i$ es acotado inferiormente para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$*

*(ii) $C_t$ tiene grafo cerrado sobre $P^*$ para todo $t \in I$ , y*

*(iii) Si $p \in P \setminus P^*$ se verifica lo siguiente. Para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un entorno $V$ de $p$ y un tipo de agente $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que si $z = (z_1, \ldots, z_\ell) \in C_i(p')$, con $p' \in V$, entonces $z_h > r$, para algún $h \in \{1, \ldots, \ell\}$.*

*Entonces $\Pi(S, \mathcal{E})$ es cerrado para cualquier coalición $S$ que verifique $J_S = \emptyset$, es decir, $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

*Demostración.* Sea $S \subset I$ en las condiciones del lema y sea $(p_k)$ una sucesión de precios convergente a $p_0$, tal que $p_k \in \Pi(S, \mathcal{E})$, para todo $k$. Nótese que entonces $(p_k) \subset P^*$. Definamos la correspondencia $G$ como la que a cada $p \in P$ le asocia el conjunto $G(p) = C(p) + \sum_{i=1}^m \mu(S^i) G_i(p)$ en $\mathbb{R}^\ell$, siendo $C(p) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i) C_i(p)$ y $G_i(p) = \{Z_i(p) | Z_i \in \Theta_i\}$. $C$ tiene grafo cerrado sobre $P^*$, pues para todo $t \in I$ se verifica que $C_t$ es cerrada sobre $P^*$ y toma valores cerrados y acotados inferiormente. Por definición de $\Theta_i$, se tiene que $G_i$ es cerrada y toma valores cerrados y acotados inferiormente. Luego, $G$ tiene grafo cerrado sobre $P^*$. Basta ahora probar que $p_0 \in P^*$. Supongamos que no ocurre así. Como $0 \in G(p_k)$, para todo $k$, existen $z_i^k \in C_i(p_k)$, y existen $\theta_i^k \in G_i(p_k)$, tales que para todo $k$ se verifica $\sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i) z_i^k + \sum_{i=1}^m \mu(S^i) \theta_i^k = 0$. Además, existe $b < 0$, tal que $b \leq (z_i^k)_h$ y $b \leq (\theta_i^k)_h$, para todo $h \in \{1, \ldots, \ell\}$ y para todo $k$. Sea $r > -b \left( \frac{1}{\min_i \mu(I_i \setminus S_i)} - 1 \right)$. Por *(iii)* existe $\bar{k}$ tal que para cada $k > \bar{k}$ se tiene que $(z_i^k)_h > r$, para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para algún bien $h \in \{1, \ldots, \ell\}$. Lo cual contradice el que $0 \in G(p_k)$, para todo $k$ ó, equivalentemente, $p_k \in \Pi(S, \mathcal{E})$, para todo $k$.

Q.E.D.

Consideremos una sucesión de coaliciones $(S_n)$, con $\mu(S_n) \to 0$. Supongamos que el incentivo de la coalición $S_n$ a desviarse de un comportamiento precio-aceptante viene dado bien por el incremento medio de utilidad que pueden conseguir los agentes que la forman, o bien por el incremento agregado. A continuación se prueba que entonces el incentivo de la coalición $S_n$ a adoptar un comportamiento no competitivo es arbitrariamente pequeño si $n$ es suficientemente grande.

**Teorema** 3.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía en las condiciones de los lemas anteriores. Supongamos que las funciones indirectas de utilidad $V_i$ son continuas en cualquier $p \in \Pi(\mathcal{E})$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en $\mathcal{E}$ .*

*Demostración.* Supongamos que no se verifica la compatibilidad en incentivos coalicional en el límite. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y existe una sucesión de asignaciones $(x^k)$ tal que $x^k \in X(S_k, \mathcal{E})$, y tal que para cada asignación competitiva $x$ existe algún tipo de agente $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ para el que se verifica $U_{i_0}(x_t^k) > U_{i_0}(x_t) + \varepsilon$, , para casi todo $t \in S^{i_0}$, para todo $k$. Sea $p^k \in \Pi(S_k, \mathcal{E})$ el sistema de precios vía el cual $x^k$ es una asignación alcanzable por la coalición $S$. Por el lema 3.1, existe $(S'_k)$, con $\mu(S'_k) \to 0$, tal que $p^k \in \Pi(S'_{k'}, \mathcal{E})$, para todo $k' \leq k$. $(p^k)$ es acotada y, por tanto, contiene una subsucesión, que también denotamos $(p^k)$, convergente a $p$. Por el lema 3.5, $\Pi(S'_k, \mathcal{E})$ es cerrado para todo $k > k_0$. Luego, $p \in \bigcap_{k>k_0} \Pi(S'_k, \mathcal{E})$. Aplicando el lema 3.4 se tiene que $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Por otra parte se tiene que $V_i(p^k) \geq U_t(x_t^k)$, para casi todo $t \in S^i$, para todo $i$ y para todo $k$. Sea $x$ asignación de equilibrio competitivo a precios $p$, con $x_t = x_i$ para casi todo $t \in I_i$, para todo $i$. Como $V_i$ es continua en $p$, se deduce que $\lim_k sup\ U_t(x_t^k) \leq V_t(p) = V_t(x_t)$, para casi todo $t \in I$. Por definición, existe $\bar{k}$ tal que $\lim_k sup\ U_i(x_i^k) \geq U_i(x_i^k) - \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $i$, para todo $k \geq \bar{k}$. Se obtiene entonces una contradicción con que $U_{i_0}(x_t^k) > U_{i_0}(x_t) + \varepsilon$, para casi todo $t \in S^{i_0}$, para todo $k$.

Q.E.D.

Obtenemos de este modo que una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distinguen un número finito de características distintas, supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

# 4 Una interpretación discreta: Sucesiones de economías réplicas

Por lo que al equilibrio competitivo se refiere, una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distinguen un número finito de características distintas, puede entenderse como una economía con un conjunto finito de agentes, y viceversa. (Véase García-Cutrín y Hervés (1993)). Siguiendo esta idea, el objetivo de esta sección es discretizar el resultado límite de compatibilidad en incentivos coalicionales obtenido para economías continuas de $m$ tipos.

A pesar de que en economías finitas los agentes individuales, y por tano las coaliciones, tengan incentivos a adoptar un comportamiento no competitivo, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que aumenta el número de agentes. En efecto, Roberts y Postlewaite (1976) prueban que la ganancia de utilidad que un agente individual puede conseguir actuando estratégicamente converge a cero si el número de agentes aumenta mediante réplicas o si la sucesión de economías converge a una economía en la que la correspondencia de precios de equilibrio competitivo sea continua. En lo que sigue probamos que se obtiene el mismo resultado si consideramos desviaciones de coaliciones. De hecho, como veremos, no es más que una interpretación discreta del resultado obtenido para economías continuas en la sección anterior.

Consideremos una economía continua $\mathcal{E}_c$ como la descrita en la sección 3, donde sólo se distinguen $m$ tipos de agentes. Siguiendo García-Cutrín y Hervés (1993), podemos interpretar esta economía continua $\mathcal{E}_c$ como una economía con $m$ agentes donde el agente $i$ representa infinitos agente idénticos. También podemos interpretar $\mathcal{E}_c$ como una economía con $m$ agentes no homogéneos, donde la influencia relativa del agente $i$ viene dada por la medida $\mu(I_i)$ del subintervalo $I_i$ que representa el tipo $i$. Para ello, asociamos a la economía $\mathcal{E}_c$ una economía discreta $\mathcal{E}_m$ con $m$ agentes, donde cada agente $i \in I_m = \{1, \ldots, m\}$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_i$, sus dotaciones iniciales $\omega_i$ y su relación de preferencias $\succeq_i$, representable por la función de utilidad $U_i$. De este modo, una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ puede interpretarse como una asignación $x = (x_1, \ldots, x_m)$ en $\mathcal{E}_m$, donde $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Recíprocamente, una asignación $x$ en $\mathcal{E}_m$ puede interpretarse como una asignación $f$ en $\mathcal{E}_c$ , donde $f$ es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.

Para cada $r$ entero positivo, definimos la $r$-réplica de la economía $\mathcal{E}_m$, que denotamos por $r\mathcal{E}_m$, como una nueva economía con $rm$ agentes indiciados por $ij$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, r$, tal que cada consumidor $ij$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_{ij} = X_i$, sus recursos iniciales $\omega_{ij} = \omega_i$ y su función de utilidad $U_{ij} = U_i$. Sea $\Theta_{ij}$ el conjunto de estrategias del agente $ij$ en la economía $r\mathcal{E}_m$. Para cada $i \in I_m$ definimos $\Theta_{ij} = \Theta_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Consideremos la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$. Denotemos por $rI_m$ (resp. por $\mathcal{P}(rI_m)$) el conjunto de agentes (resp. el conjunto de coaliciones) en cada economía $r\mathcal{E}_m$. Sea $\bar{r}$ entero positivo y sea $S \subset \bar{r}I_m$ (resp. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\bar{r}I_m)$) una coalición (resp. un conjunto de coaliciones) en la economía réplica $\bar{r}\mathcal{E}_m$. A continuación introducimos la noción de compatibilidad en incentivos coalicional en el límite asociada a una coalición $S$ y a un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$, respectivamente.

**Definición** 4.1 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición $S$ (o $S$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r^*$, tal que para todo $r \geq r^*$ se verifica lo siguiente. Si $x^r \in X(S, r\mathcal{E}_m)$ entonces existe $x$ asignación competitiva de $\mathcal{E}_m$ tal que $U_i(x_i) > U_i(x^r_{ij}) - \varepsilon$, para todo $ij \in S$.*

**Definición** 4.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$ si es $S$-compatible en incentivos en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$ para toda coalición $S \in \mathcal{S}$.*

La interpretación de la definición de compatibilidad coalicional en el límite en economías réplicas es la siguiente. Consideremos que el incentivo de una coalición a comportarse no competitivamente viene dado por la suma (o si se quiere por la media) de la ganancia de utilidad que los agentes que la forman pueden conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Entonces, si el mecanismo competitivo es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$, se tiene que el incentivo de cualquier coalición $S \in \mathcal{S}$ a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el número de agentes es suficientemente grande.

A continuación obtenemos la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en economías réplicas como una interpretación discreta del resultado establecido para economías continuas de $m$ tipos de agentes. Para ello, necesitamos un lema previo que relaciona el conjunto de precios alcanzables por una coalición en una economía finita con el conjunto de precios alcanzables por determinadas coaliciones asociadas en la economía continua. Utilizaremos la siguiente notación. Para cada coalición $S$ en $r\mathcal{E}_m$, sea $S_i = \{j \in \{1, \ldots, r\} | ij \in S\}$ y sea $r_i = card(S_i)$. Dada una coalición cualquiera $S \subset rI_m$ le asociamos el conjunto $\mathcal{S}_c$ de coaliciones en la economía continua $\mathcal{E}_c$ . $\mathcal{S}_c$ está formado por las coaliciones $S_c \subset [0,1]$, tales que $\mu(S_c^i) = \frac{r_i}{rm}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

**Lema** 4.1 *Sea $S$ una coalición en la economía réplica $r\mathcal{E}$. Se verifica que $\Pi(S, r\mathcal{E}) = \Pi(\mathcal{S}_c, \mathcal{E}_c)$, siendo $\mathcal{S}_c$ el conjunto de coaliciones asociado a $S$ en la economía continua $\mathcal{E}_c$ .*

*Demostración.* Sea $p$ un sistema de precios alcanzable por la coalición $S$ en $r\mathcal{E}_m$ vía el perfil de estrategias $(\theta_{ij})_{ij \in S}$. Basta hacer notar que entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \in I_m$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m r_i\theta_i + \sum_{i=1}^m (r - r_i)z_i$, con $\theta_i = \frac{1}{r_i}\sum_{j \in S_i} \theta_{ij}$. Por definición de los conjuntos de estrategias, se tiene que $\theta_i \in \Theta_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto $p \in \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$, cualquiera que sea $S_c \in \mathcal{S}_c$. Recíprocamente, si $p \in \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$, para alguna coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$, entonces por el lema 3.1 existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_{S_c}$ y existen $\theta_i \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_i$, para cada $t \in S_c^i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m (\mu(I_i) - \mu(S_c^i)) z_i + \sum_{i=1}^m \mu(S_c^i)\theta_i$. Luego $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$.

Q.E.D.

Hemos obtenido que un sistema de precios $p$ es alcanzable por una coalición $S$ en la economía $r\mathcal{E}_m$ si y sólo si $p$ es alcanzable por cualquier coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$ en la economía continua $\mathcal{E}_c$ . Como consecuencia inmediata se tiene que si los consumos $(x_{ij})_{ij \in S}$ son factibles para la coalición $S$ en $r\mathcal{E}_m$, entonces $f(t) = \frac{1}{r_i}\sum_{ij \in S_i} x_{ij}$, si $t \in S_c^i$, es factible para la coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$. Recíprocamente, si $f \in X(S_c, \mathcal{E}_c)$, con $S_c \in \mathcal{S}_c$, entonces $x_{ij} = x_i = \frac{1}{\mu(S_c^i)} \int_{S_c^i} f d\mu$ es factible para $S$ en $r\mathcal{E}_m$.

Los siguientes lemas permiten caracterizar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}_m$ como aquellos que son alcanzables por alguna coalición en cualquier réplica $r\mathcal{E}_m$, con $r$ suficientemente grande.

**Lema** 4.2 *Sea* $S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\bar{r}I)$. *Entonces* $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m)$ *para todo* $r > \bar{r}$. *Por tanto,* $\Pi(\mathcal{S}, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(\mathcal{S}, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, *para todo* $r > \bar{r}$.

*Demostración.* Basta hacer notar que si $r > \bar{r}$, entonces $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$ y $\Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m) = \Pi(\bar{S}_c, \mathcal{E}_c)$, con $\mu(S_c^i) < \mu(\bar{S}_c^i)$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Q.E.D.

**Observaciones.** Obsérvese que $\Pi(S, r\mathcal{E}) \subset \Pi(\bar{r}I_m, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, para todo $r \geq \bar{r}$. Además $\Pi(rI_m, r\mathcal{E}_m) = \Pi(r'I_m, r'\mathcal{E}_m)$, para cualesquiera $r, r'$ enteros positivos. Luego, para todo $r' \in \mathbb{N}$ se verifica $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(r'I_m, r'\mathcal{E}_m)$. Por el lema anterior, considerando $S \in \mathcal{P}(\bar{r}I_m)$, se tiene que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, para todo $r \geq \bar{r}$. La pregunta es, si $S \in \mathcal{P}(rI_m) \setminus \mathcal{P}(r'I_m)$ con $r' < r$, ¿existe alguna coalición $S' \in \mathcal{P}(r'I_m)$, distinta de $r'I_m$ tal que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S', r'\mathcal{E}_m)$?. La respuesta es si. En efecto, sea $S \in \mathcal{P}(rI_m) \setminus \mathcal{P}(r'I_m)$ y sea $H = \{i \in I_m | r_i > r'\}$, $H \neq \emptyset$ pues $S \notin \mathcal{P}(r'I_m)$. Tomemos $S' \in \mathcal{P}(r'I_m)$ como la coalición formada por $r_i$ agentes de tipo $i$, si $i \notin H$, y $r'$ agentes de tipo $i$, si $i \in H$. Sea ahora $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$. Entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \in I$, y $\theta_i \in Z_i(p)$, con $Z_i \in \Theta_i$, para cada $i \in J$, tales que $0 = \sum_{i=1}^{m}(r - r_i)z_i + \sum_{i=1}^{m} r_i\theta_i$. Sea $J = \{i \in I_m | r_i > 0\}$.Definamos para cada $i \in J$ la estrategia $\theta_i' = (1 - \lambda_i)z_i + \lambda\theta_i$, con $\lambda_i = \frac{r'}{r}$ si $i \notin H$ y $\lambda_i = \frac{r_i}{r}$ si $i \in H$. Se deduce que $0 = \sum_{i \notin H}(r' - r_i)z_i + \sum_{i \notin H} r_i\theta_i' + \sum_{i \in H} r'\theta_i'$. Por tanto $p \in \Pi(S', r'\mathcal{E}_m)$.

Como interpretación discreta del lema 3.4 se obtiene el siguiente resultado.

**Lema** 4.3 *Supongamos que la economía* $\mathcal{E}_m$ *verifica las condiciones del lema 3.2. Entonces, si existe* $S \subset \bar{r}I_m$ *tal que* $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$ *para todo* $r \geq \bar{r}$ *se tiene que* $p \in \Pi(\mathcal{E}_m)$.

*Demostración.* Para cada $r \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = P(S_c^r, \mathcal{E}_c)$, y $\mu(S_c^r)$ converge a cero cuando $r \longrightarrow \infty$. Por el teorema 1 a) en García-Cutrín y Hervés, se verifica que $\Pi(\mathcal{E}_m) = \Pi(\mathcal{E}_c)$. Basta aplicar ahora el lema 3.2.

Q.E.D.

La interpretación discreta del lema 3.5 establece condiciones suficientes para que el conjunto de precios alcanzables por una coalición en una economía réplica sea un conjunto cerrado. Para ello, consideremos una coalición $S \subset \bar{r}I$. Recordar que $r_i = card(S_i)$, siendo $S_i = \{j \in \{1, \dots, \bar{r}\} | ij \in S\}$. Recordar también que $P^* = \{p \in P | \sum_{i=1}^{m} C_i(p) \neq \emptyset\}$.

**Lema** 4.4 *Supongamos que la economía* $\mathcal{E}_m$ *verifica las condiciones establecidas en el lema 3.5. Entonces* $\Pi(S, r\mathcal{E}_m)$ *es cerrado para todo* $r > \max_{i \in I_m}\{r_i\}$.

*Demostración.* Es suficiente tener en cuenta que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = \Pi(S_c^r, \mathcal{E}_c)$, y $(\mu(I_i) - \mu(I_i \cap S_c^r)) > 0$, para todo $i \in I_m$ si y sólo si $r > \max_{i \in I_m}\{r_i\}$.

Q.E.D.

Por último, el teorema 3.1 permite concluir que para sucesiones de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$, el mecanismo competitivo es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en el límite, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(rI_m)$, para algún $r$ entero positivo. En particular, el mecanismo competitivo es compatible en incentivos individualmente en el límite.

**Teorema** 4.1 *Sea la economía $\mathcal{E}_m$ en las condiciones del teorema 3.1. Consideremos la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$, y una coalición $S \subset rI_m$, para algún $r$. Entonces, el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición $S$ en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$.*

*Demostración.* Si $f$ es asignación de equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_c$ , entonces $x$, con $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$, es asignación de equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_m$ (teorema 1.a) en García-Cutrín y Hervés). Utilizando ahora el teorema 3.1 se concluye la prueba.

Q.E.D.

# 5 Compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sucesiones de economías continuas

En la sección 3 se ha probado que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en economías continuas con un número finito de tipos. Ello, permite generalizar el resultado obtenido por Roberts y Postlewaite (1976) para sucesiones de economías réplicas, donde sólo se consideran incentivos individuales. Concretamente, permite obtener, como una interpretación discreta, la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en economías réplicas. En el citado artículo de Roberts y Postlewaite se establece un ejemplo de una sucesión de economías finitas, donde el número de agentes converge a infinito de modo que la dotación de cada agente se hace arbitrariamente pequeña respecto a la dotación agregada y, sin embargo, el mecanismo competitivo no es compatible en incentivos individualmente en el límite. Por tanto, si consideramos situaciones en las que el número de agentes aumenta de manera arbitraria, el resultado obtenido para economías réplicas no es, en general, cierto.

El objetivo de esta sección es extender el teorema 3.1 a situaciones más generales, de modo que nos permita obtener una interpretación discreta en términos de sucesiones de economías finitas, donde el número de agentes no aumente mediante réplicas, sino de manera arbitraria. Como veremos a continuación, para obtener la compatibilidad coalicional en el límite en casos más generales, es condición suficiente la continuidad de la correspondencia $\Pi$ de precios que vacia los mercados. Para formalizar dicha condición necesitamos definir una topología en el conjunto de economías.

Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro sin átomos. El espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0,1]$ el conjunto de consumidores, $\mathcal{A}$ el conjunto formado por los subconjuntos medibles de $I$ y $\mu$ la medida de Lebesgue. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t = \mathbb{R}^\ell_+$, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \to \mathbb{R}$ continua. Sea $C_t$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$ en la economía $\mathcal{E}$. Para estudiar propiedades de incentivos coalicionales en estas economías más generales que la economía continua de $m$ tipos de agentes, consideramos que los agentes pueden declarar otras correspondencias de respuesta a los precios diferentes de la competitiva. Denotemos por $\Theta$ el conjunto de estrategias de cada agente $t \in I$, definido como sigue

$$\begin{aligned} \Theta = \{ \ & Z : P \to \overline{\mathbb{R}}^\ell | Z \text{ es una correspondencia cerrada, con valores no vacios,} \\ & \text{y para cada } p \in P \text{ se verifica que } p\theta \leq 0 \text{ para todo } \theta \in Z(p)\} \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ denota la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, localmente compacto y separable $\overline{\mathbb{R}}$ es compacto y metrizable. Tómese, por ejemplo, la distancia definida por $d(x,y) = \min\{| \, arctg\, x - arctg\, y \, |, \pi - | \, arctg\, x - arctg\, y \, |\}$, si $x, y \neq \infty$, y $d(x,\infty) = \min\{\frac{\pi}{2} - arctg\, x, \frac{\pi}{2} + arctg\, x\}$. Consideremos en $\overline{\mathbb{R}}^\ell$ la topología producto. Decimos que una correspondencia $Z$ definida en $P$ y con valores en $\overline{\mathbb{R}}^\ell$ es cerrada si su grafo $\mathcal{G}r(Z) = \{(p,\theta) \in P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell | \theta \in Z(p)\}$ es cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. Denotemos por $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos cerrados no vacios de $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. Consideremos en $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell)$ la la distancia de Hausdorff, que denotamos por $\delta_H$. $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$ es un espacio métrico compacto. Por tanto, $(\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell), \delta_H)$ es un espacio métrico compacto. Como cada correspondencia $Z \in \Theta$ es cerrada, podemos interpretar $\Theta$ como un subconjunto de $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell)$. Consideremos en $\Theta$ la distancia $\delta_H$.

**Observaciones.** Supongamos que el comportamiento estratégico de cada agente $t \in I$ consiste en declarar una función de utilidad $U'_t$, que representa unas preferencias distintas de sus preferencias reales, y unos recursos iniciales $\omega'_t \leq \omega_t$. Entonces, las correspondencias de exceso de demanda, procedentes de dicho comportamiento, son semicontinuas superiormente en $int(P)$ y toman valores cerrados en $\mathbb{R}^\ell$, por tanto, tienen grafo cerrado en $int(P) \times \mathbb{R}^\ell$. (Véase Hildebrand (1974)). Sea $Z : int(P) \to \mathbb{R}^\ell$ una correspondencia de exceso de demanda de este tipo que procede de una función de utilidad $U$ y unos recursos iniciales $\omega$. Sea $F_h = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^\ell | x_h = \infty \ \text{ y } \ x_k \in [-\omega_k, \infty] \ \text{ para todo } \ k \neq h\}$, donde para cada $x \in \overline{\mathbb{R}}^\ell$, $x_h$ denota la $h$-ésima coordenada de $x$. Para cada $p \in P$ sea $H(p) = \{h \in \{1, \ldots, \ell\} | p_h = 0\}$. Definamos $\widehat{Z}$ como la correspondencia dada por $\widehat{Z}(p) = Z(p)$, si $H(p) = \emptyset$, y $\widehat{Z}(p) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^\ell | px \leq 0\} \bigcap \{\bigcup_{h \in H(p)} F_h\}$, si

$H(p) \neq \emptyset$. Nótese que $\widehat{Z} \in \Theta$. En efecto, por construcción se tiene que cualquiera que sea $p \in P$ se verifica $p\theta \leq 0$ para todo $\theta \in \widehat{Z}(p)$. Como $Z$ tiene grafo cerrado en $int(P) \times \mathbb{R}^\ell$, se deduce que $\widehat{Z}$ tiene grafo cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. Además $0 \in \int_I Z_t(p)d\mu$ si y sólo si $0 \in \int_I \widehat{Z}_t(p)d\mu$. Así pues, podemos considerar, como caso particular, que las estrategias de un agente $t \in I$ consisten en las correspondencias de exceso de demanda resultantes de declarar características diferentes de las reales, es decir, correspondencias de exceso de demanda procedentes de preferencias definidas por $U_t'$ y recursos iniciales $\omega_t'$, en vez de $U_t$ y $\omega_t$.

Por último, señalar que uno podría pensar en definir $\widehat{Z}$ de modo que $(\widehat{Z}(p))_h = \infty$, para cada $h \in H(p)$. Pero en este caso no podemos garantizar que $\widehat{Z}$ tenga grafo cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. La razón es que si $(p_n)$ en $int(P)$ converge a $p$, con $Card(H(p)) > 1$, entonces existe $h \in H(p)$ tal que $(Z(p_n))_h$ converge a $\infty$, pero $(Z(p_n))_h$ puede no converger a $\infty$ para todo $h \in H(p)$. (Véase Aliprantis, Brown y Burkinshaw (1990), pág. 27).

Un perfil de estrategias para es una aplicación medible $\theta : I \to \Theta$. Sea $\widehat{\theta}$ el perfil de estrategias dado por $\widehat{\theta}(t) = \widehat{C}_t$, para cada $t \in I$. Para determinar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ es suficiente describir $\mathcal{E}$ como una medida $\widehat{\alpha}$ sobre $\Theta$, definida por $\widehat{\alpha} = \mu \circ \widehat{\theta}^{-1}$. Nos referiremos a $\widehat{\alpha}$ como la medida de probabilidad que describe la economía $\mathcal{E}$ . Sea $\mathcal{M}(\Theta)$ el conjunto de medidas de probabilidad de Borel sobre $\Theta$. Consideremos en $\mathcal{M}(\Theta)$ la topología de la convergencia débil de medidas. Cada perfil de estrategias $\theta$ define una medida de probabilidad $\alpha_\theta \in \mathcal{M}(\Theta)$ dada por $\alpha_\theta = \mu \circ \theta^{-1}$. Además, cada elemento de $\mathcal{M}(\Theta)$ puede entenderse como la descripción de una economía abstracta.

Dado un sistema de precios $p \in P$ definimos la correspondencia $\varphi(\cdot, p) : \Theta \to \overline{\mathbb{R}}^\ell$ dada por $\varphi(Z, p) = Z(p)$, para cada $Z \in \Theta$. Decimos que $p \in P$ es un sistema de precios que vacia los mercados en la economía descrita por la medida $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$, y denotamos $p \in \Pi(\alpha)$, si $0 \in \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha = \int_\Theta Z(p)d\alpha$. Decimos que un sistema de precios $p \in P$ es alcanzable por la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, si existe un perfil de estrategias $\theta$, con $\theta(t) = \widehat{C}_t$ para cada $t \notin S$, tal que $0 \in \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha_\theta$, equivalentemente, $p \in \Pi(\alpha_\theta)$. Luego, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ entonces existen $z_t \in \widehat{C}_t(p)$, para cada $t \notin S$ y $\theta_t \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta$ para cada $t \in S$, tales que $0 = \int_{I \setminus S} z_t d\mu(t) + \int_S \theta_t d\mu(t)$. Si para todo $t \in S$ se verifica que $\theta_t + \omega_t \in \mathbb{R}_+^\ell$, decimos entonces que $x^S : S \to \mathbb{R}_+^\ell$, con $x^S(t) = \theta_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $x^S \in X(S, \mathcal{E})$.

Consideremos ahora una sucesión $(\mathcal{E}_n)$ de economías de intercambio puro sin átomos. En cada economía $\mathcal{E}_n$ el espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0,1]$ el conjunto de condumidores, $\mathcal{A}$ el conjunto formado por los subconjuntos medibles de $I$ y $\mu$ la medida de Lebesgue. Cada agente $t$ en la economía $\mathcal{E}_n$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t = \mathbb{R}_+^\ell$, sus recursos iniciales $\omega_t^n \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t^n$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t^n : X_t \to \mathbb{R}$ continua. Sea $C_t^n$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Sea $S$ una coalición en la economía $\mathcal{E}_n$. Decimos que $S$ pertenece también a la economía $\mathcal{E}_{n'}$ si existe una coalición $S'$ en $\mathcal{E}_{n'}$ con $\mu(S) = \mu(S')$ y una biyección $\pi : S \to S'$, tal que para todo agente $t \in S$ se verifica que $\omega_t^n = \omega_{\pi(t)}^{n'}$ y $U_t^n = U_{\pi(t)}^{n'}$. Como el mecanismo competitivo es anónimo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\pi$ es la identidad. Decimos que la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ coverge a la economía $\mathcal{E}$ si la sucesión de medidas $\alpha_n$ converge débilmente a $\alpha$, siendo $\alpha_n$ (resp. $\alpha$) la medida que describe $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{E}$ ).

**Definición** 5.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ una sucesión de economía sin átomos que converge a la economía $\mathcal{E}$ . Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en sentido fuerte en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ si para cualquier sucesión de coaliciones $(S_n)$ con las propiedades*

*i) $S_n$ pertenece a $\mathcal{E}_n$ para todo $n$,*

*ii) Existe $\bar{n}$ tal que, para cada $n \geq \bar{n}$ $S_n$ pertenece a $\mathcal{E}_{n'}$ para todo $\bar{n} \leq n' \leq n$, y,*

*iii) $\mu(S_n)$ converge a cero,*

*se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n^*$, tal que para todo $n \geq n^*$ se tiene que si $x^n \in X(S_n, \mathcal{E}_n)$, entonces existe $x_n^*$ asignación walrasiana de $\mathcal{E}_n$, tal que $U_t(x_n^*(t)) > U_t(x^n(t)) - \varepsilon$, para casi todo $t \in S_n$.*

**Definición** 5.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalemte en el límite en sentido fuerte en la economía sin átomos $\mathcal{E}$ si lo es en cualquier sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ que converja a $\mathcal{E}$ . En este caso diremos que $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivoa coalicionales en sentido fuerte.*

Nótese que la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sentido fuerte implica la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite. La interpretación continua del ejemplo que aparece en Roberts y Postlewaite (1976) prueba que las hipótesis que garantizan que el mecanismo competitivo sea compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en economías continuas de $m$ tipos no son suficientes si consideramos economías más generales. Probamos a continuación que la continuidad de la correspondencia de precios que vacían los mercados es condición suficiente para obtener la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sentido fuerte. Probablemente esta condición de continuidad sea más fuerte que necesaria. Lo que realmente necesitamos es que cuando $n \to \infty$ y las economías reales y aparentes están cerca, entonces los precios que vacían los mercados estén también cerca. Esto es precisamente lo establecido directamente en el lema 3.2 para el caso de economías continuas de $m$ tipos de agentes y, en el lema 4.3 para el caso de economías réplicas.

**Teorema** 5.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua y sea $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ una medida de probabilidad que describe a $\mathcal{E}$ . Supongamos que la correspondencia de precios que vacian los mercados es continua en $\alpha$ y que las funciones indirectas de utilidad $V_t$ existen y son continuas en un entorno de $\Pi(\alpha)$ para casi todo agente $t \in I$. Entonces $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivoa coalicionales en sentido fuerte.*

*Demostración.* Supongamos que no se verifica la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite en sentido fuerte. Entonces, existen una sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ que converge a $\mathcal{E}$ , una sucesión de coaliciones $(S_n)$ con las propiedades *(i)*, *(ii)* y *(iii)* en la definición 5.1, existe $\varepsilon > 0$ y, existe una sucesión de asignaciones $(x^n) \in X(S_n, \mathcal{E}_n)$, tales que para cada asignación competitiva $x_n^*$ de $\mathcal{E}_n$ se verifica $U_t(x^n(t)) > U_t(x_n^*(t))+\varepsilon$, para todo $t \in S_n' \subset S_n$, con $\mu(S_n') > 0$, para todo $n$. Para cada $n$, sea $p_n \in \Pi(S_n, \mathcal{E}_n)$ el sistema de precios vía el cual $x^n$ es una asignación alcanzable por la coalición $S_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$, y sea $\theta_n$ el perfil de estrategias vía el cual $p_n$ es alcanzable por la coalición $S_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Consideremos $\alpha_n' = \mu \circ \theta_n^{-1}$. Como $\mu(S_n)$ converge a cero, se tiene que $\alpha_n'$ converge débilmente a $\alpha$. Sea $\alpha_n$ la medida de probabilidad que describe a la economía $\mathcal{E}_n$. Por la desigualdad triangular, se tiene que para cada $\delta > 0$ existe $\bar{n}$ tal que $\delta_H(\Pi(\alpha_n'), \Pi(\alpha_n)) < \delta$, para todo $n \geq \bar{n}$. Luego, para cada $n$ suficientemente grande, existe $\bar{p}_n \in \Pi(\alpha_n)$ tal que $\bar{p}_n$ está arbitrariamente cercano a $p_n$ y ambos en un entorno de $\Pi(\alpha)$, donde las funciones $V_t$ son continuas. Sea $\bar{x}^n$ asignación competitiva a precios $\bar{p}_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Se tiene entonces que $V_t(p_n) \geq U_t(x^n(t)) > U_t(\bar{x}^n(t)) + \varepsilon = V_t(\bar{p}_n) + \varepsilon$, para todo $t \in S_n'' \subset S_n'$, con $\mu(S_n'') > 0$, para cada $n$ suficientemente grande. Pero esto contradice la continuidad de las funciones de utilidad indirecta.

Q.E.D.

**Corolario** 5.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua y sea $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ una medida de probabilidad que describe a $\mathcal{E}$ . Supongamos que la correspondencia de precios que vacian los mercados es continua en $\alpha$ y que las funciones indirectas de utilidad $V_t$ existen y son continuas en un entorno de $\Pi(\alpha)$ para casi todo agente $t \in I$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$ .*

*Demostración.* Basta considerar $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ para todo $n$.

Q.E.D.

Para establecer el resultado de compatibilidad coalicional en el límite en sentido fuerte en economías continuas más generales que las de $m$ tipos, hemos supuesto que la correspondencia de precios que vacían los mercados sea continua en la medida de probabilidad que describe la economía. En lo que sigue, obtenemos que esta continuidad es genérica, en el sentido de que se verifica en un conjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$. Un conjunto residual de un espacio métrico es aquel que contiene una intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos o, equivalentemente, su complementario está contenido en un conjunto de primera categoría (unión numerable de conjuntos diseminados, esto es, unión numerable de conjuntos cuya clausura tiene interior vacío). El teorema de Baire establece que un residual de un espacio métrico completo es denso. su complementario es de primera categoría (unión numerable de conjuntos diseminados, esto es, unión numerable de conjuntos cuya clausura tiene interior vacío).

En la prueba de que la correspondencia $\Pi$ es continua en un subconjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$, utilizaremos el siguiente lema.

**Lema** 5.1 *La correspondencia $\varphi : \Theta \times P \to \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, definida por $\varphi(Z,p) = Z(p)$, es semicontinua superiormente.*

*Demostración.* Supongamos que $\varphi$ no es semicontinua superior en $(Z,p) \in \Theta \times P$. Entonces, existe una sucesión $(Z_n, p_n)$ en $\Theta \times P$, tal que $(Z_n)$ converge a $Z$ con la distancia de Hausdorff $\delta_H$ y $(p_n)$ converge a $p$, y existe un abierto $G$ entorno de $\varphi(Z,p)$ en $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, tal que existe una subsucesión $(Z_{n_k}, p_{n_k})$, que verifica $Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c \neq \emptyset$. Denotemos $F_{n_k} = Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c$. $(F_{n_k})$ es una sucesión de subconjuntos cerrados no vacios de $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$. Por tanto, existe una subsucesión, que también denotamos por $(F_{n_k})$ y existe $F \subset \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, $F \neq \emptyset$ tal que $Li(F_{n_k}) = F = Ls(F_{n_k})$. (Véase Hildebrand (1974)). Sea $\theta \in F$, recurriendo si es necesario a una subsucesión, existe $\theta_{n_k} \in Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c$, tal que $\theta_{n_k}$ converge a $\theta$. Como $Z$ tiene grafo cerrado y $G^c$ es cerrado, se deduce que $\theta \in Z(p) \bigcap G^c$. Lo que contredice que $\varphi(Z,p) \subset G$.

Q.E.D.

**Teorema** 5.2 *Consideremos el espacio $\mathcal{M}(\Theta)$ con la topología de la convergencia débil. La correspondencia que vacía los mercados es continua en un subconjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$.*

*Demostración.* Veamos en primer lugar que $\Theta$ es compacto. Para ello basta ver que es cerrado, pues $(\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}), \delta_H)$ es un espacio métrico y compacto. Sea $(Z_n)$ una sucesión en $\Theta$ que converge a $Z$ con $\delta_H$. Entonces $Li(\mathcal{G}r(Z_n)) = \mathcal{G}r(Z) = Ls(\mathcal{G}r(Z_n))$. Por definición de límite superior e inferior, se tiene que $Z$ toma valores no vacios, tiene grafo cerrado y $p\theta \leq 0$ para cada $p \in P$. Luego $Z \in \Theta$. Por tanto, $\Theta$ es un subconjunto compacto de un espacio métrico y, en consecuencia es separable y completo. Se obtiene entonces que la convergencia débil define una topología separable y metrizable en $\mathcal{M}(\Theta)$ y además, por ser $\Theta$ compacto y completo, $\mathcal{M}(\Theta)$ es compacto y completo. (Véase Mas-Colell (1985)). Así pues, la correspondencia de precios que vacían los mercados está definida en un espacio métrico completo y toma valores en un espacio métrico completo y separable. Luego, para demostrar que $\Pi$ es continua en un subconjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$

basta ver que es semicontinua superiormente. ( Véase teorema 1.4.13 en Aubin y Frankowska (1990)).

Sea $\theta$ un perfil de estrategias y $\alpha_\theta \in \mathcal{M}(\Theta)$ la medida de probabilidad asociada. Sea $p \in P$. Definimos $F(\alpha_\theta, p) = \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha_\theta = \int_I \theta(t)d\mu$. Como $\varphi$ es semicontinua superiormente, se verifica si $\mu \circ \theta_n^{-1}$ converge débilmente a $\mu \circ \theta^{-1}$ y $p_n$ converge a $p$, entonces $Ls(F(\alpha_{\theta_n}, p_n)) \subset F(\alpha_\theta, p)$. (Véase Mas-Colell (1985)). Por tanto, $\Pi$ es semicontinua superiormente.

Q.E.D.

**Observaciones.** Supongamos que las estrategias son funciones de demanda, consideradas como características de los agentes. Entonces, se sabe que el conjunto de economías regulares es abierto y denso en el espacio de economías. Para este tipo de resultados véase, por ejemplo, Hildebrand (1974) (teorema 5, pág. 171), Dierker (1982) (pág. 816-817), y Mas-Colell (1985) (cap. 8).

# 6 Una interpretación discreta: Sucesiones de economías descritas vía medidas simples

Como hemos visto, el teorema 3.1, establecido para economías continuas de $m$ tipos de agentes, permite una interpretación discreta en términos de economías réplicas. Veremos en esta sección que el correspondiente resultado para economías continuas más generales, permite una interpretación discreta en términos de economías descritas vía medidas simples.

Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro con un conjunto finito de agentes $I = \{1, \ldots, n\}$ definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. Cada agente $i \in I$ se caracteriza por su conjunto de consumo $X_i = \mathbb{R}^\ell_+$, sus recursos iniciales $\omega_i \in X_i$ y su función de utilidad $U_i : X_i \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Sea $C_i$ la correspondencia de exceso de demanda del agente $i \in I$ y sea $\Theta_i = \Theta$ el conjunto de estrategias para cada agente $i \in I$. Para determinar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ basta describir $\mathcal{E}$ por la medida simple $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$, definida por $\alpha(B) = \frac{Card(B \cap \{\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_n\})}{n}$, para cada subconjunto de Borel $B$ de $\Theta$.

Asociemos a la economía discreta $\mathcal{E}$ la economía continua $\mathcal{E}_c$ de $m$ tipos distintos, com $m \leq n$, donde el conjunto de agentes, representado por el intervalo $[0,1]$ se divide en $n$ subintervalos disjuntos $I_1, \ldots, I_n$, con $I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, si $i \neq n$, $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. Las características de cada consumidor $t \in [0,1]$ vienen dadas por $X_t = X_i$, $\omega_t = \omega_i$, y $U_t = U_i$, si $t \in I_i$, siendo $I_i$ el conjunto de agentes asociado al agente $i$.

Consideremos ahora una sucesión $(\mathcal{E}_n)$ de economías discretas. En cada economía $\mathcal{E}_n$ el espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I_n, \mathcal{P}(I_n), \mu)$, siendo $I_n$ el conjunto de condumidores, $\mathcal{P}(I_n)$ el conjunto formado por los subconjuntos no vacios de $I_n$ y $\mu$ la medida de contar. En cada economía $\mathcal{E}_n$ cada agente agente $i \in I_n$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_i = \mathbb{R}^\ell_+$, sus recursos iniciales $\omega_i^n \in X_i$, y una función de utilidad $U_i^n : X_i \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Sea $C_i^n$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $i \in I_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Sea $S$ una coalición en la economía $\mathcal{E}_n$. Decimos que $S$ pertenece también a la economía $\mathcal{E}_{n'}$ si existe una coalición $S'$ en $\mathcal{E}_{n'}$ con $Card(S) = Card(S')$ y una biyección $\pi : S \to S'$, tal que para todo agente $i \in S$ se verifica que $\omega_i^n = \omega_{\pi(i)}^{n'}$ y $U_i^n = U_{\pi(i)}^{n'}$. Como en la sección anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\pi$ es la identidad.

A continuación introducimos la noción de compatibilidad en incentivos coalicional en el límite en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ asociada a una coalición $S$ y a un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$, respectivamente.

**Definición** 6.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ de sucesión economías finitas y $S$ una coalición perteneciente a $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq \bar{n}$. Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición $S$ (o $S$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n^*$, tal que para todo $n \geq n^*$ se verifica lo siguiente. Si $x^n \in X(S, \mathcal{E}_n)$ entonces existe $\bar{x}^n$ asignación competitiva de $\mathcal{E}_m$ tal que $U_i(\bar{x}_i^n) > U_i(x_i^n) - \varepsilon$, para todo $i \in S$.*

**Definición** 6.2 *Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de coaliciones tal que cada coalición $S \in \mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq \bar{n}$. Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías finitas $(\mathcal{E}_n)$ si es $S$-compatible en incentivos en el límite en $(\mathcal{E}_n)$ para toda coalición $S \in \mathcal{S}$.*

Si consideramos que la sucesión de economías $\mathcal{E}_n$ verifica que $Card(I_n)$ converge a $\infty$, entonces la interpretación de la definición coalicional en el límite en este tipo de economías, donde el número de agentes aumenta de manera arbitraria, es la misma que en el caso de economías réplicas.

A continuación obtenemos la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en sucesiones de economías finitas, más generales que las economías réplicas, como una interpretación discreta del resultado establecido para economías continuas más generales que las de $m$ tipos de agentes.

**Teorema** 6.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ una sucesión de economías con un conjunto finito de agentes $(I_n)$, tal que $k(n) = Card(I_n)$ converge a $\infty$. Supongamos que la sucensión de medidas simples $(\alpha_n)$ en $\mathcal{M}(\Theta)$ que describe la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ converge a una medida $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ donde la correspondencia $\Pi$ de precios que vacían los mercados es continua. Sea $S$ una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq n_0$. Supongamos que para cada $i \in S$ la función indirecta de utilidad $V_i$ esxiste y es continua en un entorno de $\Pi(\alpha)$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos en el límite para la coalición $S$ en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$.*

*Demostración.* Denotemos por $\mathcal{E}_{c(n)}$ la economía continua de $m(n)$ tipos, con $m(n) \leq k(n)$ asociada a la economía finita $\mathcal{E}_n$. La sucensión de medidas simples $(\alpha_n)$ en $\mathcal{M}(\Theta)$, que describe la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$, describe también la sucesión de economías continuas $(\mathcal{E}_{c(n)})$. Asociemos a la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}_n$ la coalición $S_{c(n)}$ en la economía $\mathcal{E}_{c(n)}$, definida por $S_{c(n)} = \bigcup_{i \in S} I_i^{k(n)}$, siendo $I_i^{k(n)} = \left[\frac{i-1}{k(n)}, \frac{i}{k(n)}\right)$, si $i \neq k(n)$, $I_{k(n)}^{k(n)} = \left[\frac{k(n)-1}{k(n)}, 1\right]$. Por el teorema 5.1 se obtiene que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en sentido fuerte en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_{c(n)})$. Por otra parte $\Pi(S, \mathcal{E}_n) = \Pi(S_{c(n)}, \mathcal{E}_{c(n)})$ y $(S_{c(n)})$ verifica las condiciones establecidas en la definición 5.1. Luego se tiene, en particular, que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos en el límite para la coalición $S$ en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$.

Q.E.D.

# 7 El problema de withholding en el límite

En una economía de intercambio puro, fijados los conjuntos de consumo, cada agente se caracteriza por sus preferencias y sus recursos iniciales. Podemos considerar situaciones donde obtener información completa de las dotaciones iniciales de cada agente no sea siempre posible, o situaciones donde conseguir tal información suponga costes muy altos. Así, en una economía de propiedad privada, parece razonable considerar que los agentes tienen la posibilidad de llevar al mercado no todos sus recursos sino únicamente parte de ellos. Con un comportamiento estratégico de este tipo los agentes pueden alterar la formación de precios, guiados a su propio benefecio. De hecho, situaciones económicas donde se queman bienes con la intención de manipular precios son bastante comunes en la realidad, por ejemplo, cuando hay un exceso de producción de determinadas mercancías. En este caso se ocultan bienes únicamente para alterar la formación de los precios. Pero este tipo de comportamiento estratégico en recursos puede considerarse no sólo guiado a variar precios sino también con la intención de dedicar al consumo todo o parte de aquello que se oculta. Este problema de poder manipular precios y obtener beneficios falsificando recursos, se conoce en la literatura como problema de withholding (con rendimiento total o parcial, según se consuma todo o parte de lo que no se lleva al mercado).

Postlewatite (1979) y Thomson (1987) prueban que cualquier mecanismo de asignación de recursos óptimo de Pareto e individualmente racional está sujeto al problema de withholding con rendimiento total (Postlewaite) y rendimiento parcial (Thomson). Posteriormente Yi (1991) generaliza estos resultados y prueba que la hipótesis de individualidad racional puede ser eliminada en ambos casos, es decir, el problema de withholding se presenta en cualquier mecanismo de asignación óptimo de Pareto, sea o no individualmente racional, tanto si los agentes consumen la totalidad de los recursos que ocultan como si consumen únicamente parte de aquello que no llevan al mercado.

Por otra parte, desde que Aumann (1964) planteó un modelo de equilibrio general sin átomos y presentó su conexión con el supuesto de competencia perfecta, la hipótesis de un comportamiento precio-aceptante ha sido unida a la no existencia de átomos. Sin embargo, Ostroy y Zame (1994) ponen de manifiesto que, en general, el problema de la competencia perfecta no se resuelve al considerar un continuo de agentes, pues, aún siendo así, depende de los que ellos denominan "espesor" o "grosor" de la economía. A pesar de esto y de los resultados de imposibilidad anteriormente mencionados, cabe conjeturar que en economías con un continuo de agentes y con un espacio de mercancías de dimensión finita se verifique (al menos genéricamente), que grupos arbitrariamente pequeños de agentes tengan una influencia arbitariamente pequeña en la formación de precios, si adoptan un comportamiento estratégico consistente en ocultar parte de sus recursos iniciales. El objetivo de esta sección es probar que dicha conjetura es cierta. Para ello, consideramos una economía $\mathcal{E}$ con un continuo de agentes, como la definida en la sección 5, esto es, $\mathcal{E} = ((I = [0,1], \mathcal{A}, \mu), X_t = \mathbb{R}^{\ell}_{+}, \omega_t \in X_t, U_t, t \in I)$. Suponemos que $\mathcal{E}$ verifica los supuestos establecidos en Aumann (1964) que garantizan la existencia de equilibrio competitivo en economías continuas
(H.1) $\int_I \omega(t) d\mu(t) >> 0$,
(H.2) Las funciones de utilidad $U_t$ son estrictamente monótonas, y
(H.3) Las funciones $U_t(x)$ son medibles simultáneamente en $x$ y $t$ respecto a la topología compacto-abierta.

Como ya hemos señalado, queremos concentrarnos ahora en manipulación de precios vía comportamientos estratégicos en recursos. Por ello, supondremos que las preferencias de los agentes son fijas y bien conocidas.

Sea $\Theta_t = \{ \theta \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \mid \theta \leq \omega_t \}$ el conjunto de estrategias del agente $t \in I$. Un perfil de estrategias es una aplicación $\theta : I \to \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, tal que $\theta(t) \in \Theta_t$ para todo $t \in I$. Así, si los agentes declaran un perfil de estrategias $\theta$ diferente de $\omega$, aparentan una economía $\mathcal{E}_\theta$ distinta de la real $\mathcal{E}$, definida por recursos iniciales $\theta(t)$ en vez de $\omega_t$, para cada $t \in I$. Para garantizar que exista equilibrio competitivo en las economías aparentes, decimos que un perfil $\theta$ es admisible si $\int_I \theta(t) d\mu(t) >> 0$.

Siguiendo Ostroy y Zame (1994), para concluir que un equilibrio walrasiano $(p, x)$ de la economía $\mathcal{E}$ es perfectamente competitivo deberíamos poder decir que, si $(S_n)$ es una sucesión de coaliciones cuyo tamaño converge a cero y $(\theta_n)$ es una sucesión de perfiles (que converge a $\omega$) en los que $S_n$ oculta parte de sus dotaciones, entonces debe existir una sucesión de equilibrios walrasianos $(p_n, x_n)$ asociados a la sucesión de economías $(\mathcal{E}_{\theta_n})$, tal que $p_n$ converge a $p$. Esto es un modo de decir que los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no pueden ser manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños. A continuación formalizamos este test de competencia perfecta.

**Definición** 7.1 *Sea $(p, x)$ un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$. Decimos* *que $(p, x)$ pasa el test de withholding si se verifica lo siguiente. Dada cualquier sucesión de coaliciones $(S_n)$ tal que $\mu(S_n)$ converge a cero y, dada una sucesión de perfiles $(\theta_n)$ tal que $\theta_n(t) = \omega_t$ para todo $t \notin S_n$, existe un equilibrio walrasiano $(p_n, x_n)$ para cada $\mathcal{E}_{\theta_n}$, tal que $p_n$ converge a $p$.*

El test de withholding hace referencia a convergencia de precios y no a convergencia de asignaciones. Nótese que, aunque las asignaciones walrasianas no tienen por qué estar únicamente determinadas por precios, las utilidades correspondientes sí lo están. Por tanto, aunque las asignaciones $x_n$ no converjan a $x$, las utilidades $U_t(x_n(t))$ sí convergen a $U_t(x(t))$. Nótese también que no se dice que la coalición que actúa estratégicamente se beneficie de dicho comportamiento. Esto está en relación con la interpretación de competencia perfecta como la no manipulación de precios por grupos arbitrariamente pequeños. Cualquier manipulación de precios, favorable o no, contradice la noción de competencia perfecta. En un modelo con un mecanismo competitivo bien definido, la manipulación no favorable podría ser ignorada. Sin embargo, en un modelo de negociación, a pesar de que los individuos puedan no beneficiarse directamente, su capacidad para influir en la formación de precios podría favorecer o perjudicar a otros agentes, lo que da lugar a una oportunidad de beneficio potencial (por ejemplo, los agente podrían amenazar con un posible comportamiento estratégico para obtener alguna recompensa por no actuar de ese modo).

El test de withholding está relacionado con propiedades de continuidad de la correspondencia de precios de equilibrio walrasiano. Cuando una coalición pequeña falsifica sus recursos produce una perturbación pequeña en los datos de la economía. El test de withholding requiere que, ante tales pertubaciones pequeñas, los precios de equilibrio no varíen demasiado. Esto es, la correspondencia de precios de equilibrio debe ser continua.

Sería demasiado pedir que todo equilibrio walrasiano pase el test de withholding. De hecho no es el caso. (Véase Ostroy (1980)). Por ello, para aplicar este test tomamos un punto de vista genérico, es decir, nos preguntamos si el test de withholding se verifica para un conjunto genérico de equilibrios walrasianos. Concretamente, digamos que la asignación inicial $\omega : I \to \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ pasa el test de withholding si todo equilibrio walrasiano correspondiente a $\omega$ pasa dicho test. Probamos en esta sección que un conjunto residual de recursos iniciales supera el test de withholding.

Sea $W = \{ \omega : I \to \mathbb{R}^{\ell}_{+} \mid \int_I \omega_t d\mu(t) >> 0 \} \subset L_1(\mu)$. Consideremos en $W$ la norma $\|\cdot\|_1$. Para cada $\omega \in W$ sea $\mathcal{E}_\omega$ una economía cuyos recursos iniciales vienen dados por $\omega$. Las funciones de utilidad de cada agente $t \in I$ están fijas y verifican (H.2) y (H.3). Sea $\Pi : W \to P$ la correspondencia que a cada $\omega \in W$ le asigna los precios de equilibrio competitivo de $\mathcal{E}_\omega$. Dado $L \subset W$, denotemos por $\Pi|_L$ la restricción de $\Pi$ a $L$. Para cada $n$ entero positivo sea $\overline{W_n} = \{ \omega : I \to \mathbb{R}^{\ell}_{+} \mid \int_I \omega_t d\mu(t) \geq (\frac{1}{n}, \overset{\ell}{\ldots}, \frac{1}{n}) \}$ y sea $W_n = \{ \omega : I \to \mathbb{R}^{\ell}_{+} \mid \int_I \omega_t d\mu(t) > (\frac{1}{n}, \overset{\ell}{\ldots}, \frac{1}{n}) \}$. Así, podemos escribir $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{W_n}$.

A continuación establecemos algunos resultadas que utilizaremos para probar que un conjunto genérico de dotaciones iniciales pasa el test de withholding. En particular, obtenemos que existe un conjunto denso de dotaciones iniciales que pasa dicho test.

**Lema** 7.1 *Para cada n entero positivo se verifica que* $\Pi|_{\overline{W}_n}$ *es semicontinua superiormente.*

*Demostración.* Como $\Pi|_{\overline{W}_n}$ toma valores en un compacto, basta probar que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ tiene grafo cerrado. Sea $(\omega_n)$ una sucesión de asignaciones iniciales en $\overline{W}_n$ que converge en $\|\cdot\|_1$ a $\omega$ y sea $(p_n)$ una sucesión de precios que converge a $p$, tal que $p_n \in \Pi(\omega_n)$ para todo $n$. Se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} \int_I \omega_n(t)d\mu(t) = \int_I \omega(t)d\mu(t)$. Por tanto, $\omega \in \overline{W}_n$. Además, existe una subsucesión $(\omega_{n_k})$, y una función $h \in L_1(\mu)$, tal que $\omega_{n_k}(t) \leq h(t)$ para casi todo $t \in I$ y $\omega_{n_k}$ converge a $\omega$ en casi todo punto. Luego, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que $\mu \circ \omega_{n_k}^{-1}$ converge débilmente a $\mu \circ \omega^{-1}$. Como las preferencias están fijas, podemos concluir que la distribución de características en $\mathcal{E}_{\omega_{n_k}}$ converge débilmente a la distribución de características en $\mathcal{E}$. Por tanto, $Ls(\Pi|_{\overline{W}_n}(\omega_{n_k})) \subset \Pi|_{\overline{W}_n}(\omega)$. (Véase Hildebrand (1974), proposición 4, pág. 152). Luego $p \in \Pi|_{\overline{W}_n}(\omega)$, lo que nos permite concluir que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es semicontinua superiormente en cualquier $\omega \in \overline{W}_n$.

Q.E.D.

**Lema** 7.2 *Para cada n, sea* $D_n$ *un subconjunto residual de* $W_n$*. Entonces,* $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ *es un subconjunto residual de* $W$*.*

*Demostración.* Para probar que $D$ es residual en $W$ veamos que es residual en $\overline{W} = \{\ \omega : I \to \mathbb{R}_+^\ell \mid \int_I \omega_t d\mu(t) \geq 0\ \}$. Como $\overline{W}$ es un espacio métrico completo, basta ver que $D$ es de primera categoría en $\overline{W}$. Para ello, consideremos el conjunto $A = \left\{\ \omega : I \to \mathbb{R}_+^\ell \mid \left(\int_I \omega_t d\mu(t)\right)_h = 0, \text{ para algún } h \in \{1,\ldots,\ell\}\ \right\}$. Así, $\overline{W} = W \bigcup A$, y $\overline{W} \setminus D = (A \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n)) \setminus D \subset A \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_n \setminus D_n))$. El conjunto $A$ es cerrado en $\overline{W}$ y tiene interior vacío, luego $A$ es de primera categoría en $\overline{W}$. Por hipótesis, para cada $n$, $D_n$ es residual en $W_n$, que es un conjunto abierto cuya frontera tiene interior vacío en $\overline{W}$, luego $W_n \setminus D_n$ es de primera categoría en $\overline{W}$. Por tanto, se tiene que $\overline{W} \setminus D$ es de primera categoría, por ser unión numerable de conjuntos de primera categoría. El teorema de Baire nos permite concluir que $D$ es residual en $\overline{W}$.

Q.E.D.

**Observación.** La prueba del lema se basa en la definición de $W$ y en la construcción paricular de los conjuntos $W_n$. En realidad el resultado es cierto en un marco general, independiente de la definición de $W$ y $W_n$. En efecto, se verifica la siguiente proposición.

**Proposición** 7.1 *Sea $X$ un espacio topológico, y sea $(X_n)$ un recubrimiento abierto de $X$ que verifica $\overline{X}_n \subset X_{n+1}$, donde $\overline{X}_n$ denota la clausura de $X_n$. Sea $D$ un subconjunto de $X$ tal que $D \bigcap X_n = D_n$ es residual en $X_n$ para cada $n$. Entonces $D$ es residual en $X$.*

*Demostración.* Denotemos $F = X \setminus D$, y $F_n = X_n \setminus D_n = F \bigcap X_n$. Veamos que $F$ está contenido en un conjunto que es unión numerable de cerrados con interior vacío. Por hipótesis $F_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{nj}$, donde $C_{nj}$ son cerrados sin interior de $X_n$. Veamos que $C'_{nj} = C_{nj} \bigcap \overline{X}_{n-1}$ es un cerrado sin interior de $X$. Se tiene que $C'_{nj}$ es un cerrado de $\overline{X}_{n-1}$, pues $C_{nj}$ es cerrado de $X_n$. Como un cerrado $C'_{nj}$ de un cerrado $\overline{X}_{n-1}$ es un cerrado del espacio, concluimos que $C'_{nj}$ es cerrado de $X$. Evidentemente $C'_{nj}$ tiene interior vacío. Basta ahora ver que $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C'_{nj}$. En efecto, $\bigcup_{n,j} C'_{nj} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(C_{nj} \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{nj}\right) \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F_n \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X}_{n-1}\right) = F \bigcap X = F$.

Q.E.D.

**Corolario** 7.1 *Para cada $n$, sea $D_n$ un subconjunto residual de $W_n$. Entonces, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es un subconjunto residual de $W$. Además, si $D_n$ es intersección numerable de abiertos densos de $W_n$, entonces $D$ es intersección numerable de abiertos densos de $W$.*

*Demostración.* Para probar la primera afirmación basta notar que $D_n \subset D \bigcap W_n$, y por tanto $D \bigcap W_n$ es residual en $W_n$. La misma demostración de la proposición, sustituyendo $\subset$ y $\supset$ por igualdades, prueba la segunda parte.

Q.E.D.

A continuación probamos que la economía continua $\mathcal{E}$ supera el test de withholding genéricamente.

**Teorema** 7.1 *Existe un subconjunto residual en $W$ que pasa el test de withholding.*

*Demostración.* Basta probar que $\Pi$ es continua en un subconjunto residual de $W$. Para cada $n$ consideremos $\Pi|_{\overline{W_n}}$. Por el lema 7.1, $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es semicontinua superiormente. $\overline{W}_n$ es un espacio métrico completo y $P$ es un espacio métrico completo y separable. Por tanto, para cada $n$, existe un subconjunto residual $\overline{D}_n$ de $\overline{W}_n$, tal que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es continua en $\overline{D}_n$. Denotemos $D'_n = \overline{D}_n \bigcap W_n$ y $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} D'_k$. Para cada $n$, se tiene que $D_n$ es residual en $W_n$ y $\Pi|_{W_n}$ es continua en $D_n$. Como $W_n$ es abierto, $\Pi$ es continua en $D_n$. Luego, podemos concluir que $\Pi$ es continua en $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Por el corolario 7.1, $D$ es residual en $W$.

Q.E.D.

**Observación.** Nótese que la construcción de los conjuntos $D_n$ se debe a que, en general, no podemos concluir que $\Pi$ sea continua en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n$. Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $A_n = [-n, n]$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, si $x \in A_1$ y, $f(x) = n$, si $x \in A_n \setminus A_{n-1}$, con $n > 1$. $f|_{A_1}$ es continua en $D_1 = A_1$. Para cada $n > 1$, se tiene que $f|_{A_n}$ es continua en $D_n = (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{k\}\right)$. Sin embargo, $f$ no es continua en $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

Este resultado puede interpretarse como una justificación más de que, en el caso finito-dimensional, el lugar adecuado donde suponer un comportamiento precio-aceptante lo proporciona el marco de las economías continuas, denominadas economías perfectamente competitivas.

# 8 Conclusiones

En este trabajo, se han obtenido resultados límites de compatibilidad de incentivos coalicionales del mecanismo competitivo en economías continuas y en sucesiones de economías finitas. El conjunto de estrategias considerado es lo suficientemente general como para permitir considerar como casos particulares falsificación de preferencias y/o de recursos, que es lo que realmente caracteriza a un consumidor en una economía de intercambio puro. Como ya se ha señalado en la introducción, la interpretación no es más que una justificación del supuesto competitivo en economías continuas o en economías suficientemente grandes, definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita. De hecho, las nociones que se han introducido de compatibilidad de incentivos coalicionales son interpretadas como tests de competencia perfecta.

Ostroy y Zame (1994) prueban que los resultados obtenidos en la sección 7 no son ciertos en el caso infinito-dimensional. Argumentan que si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, entonces es el "espesor" de los mercados, más que la no existencia de átomos, lo que conduce a la competencia perfecta. Más aún, muestran que esta misma condición de "espesor" o "grosor" de los mercados, que conduce a la equivalencia Core-Walras, garantiza la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio.

La literatura económica sugiere varios tests para distinguir la existencia de equilibrio walrasiano del supuesto de competencia perfecta, esto es, de suponer un comportamiento precio-aceptante por parte de los agentes. Esto conduce a plantear algunas preguntas de interés. Por ejemplo, ¿son equivalentes, al menos genéricamente, cualquiera de los tests de competencia perfecta que se han citado?. Concretamente, en el caso finito-dimensional ¿el test de equivalencia Core-Walras es equivalente a los tests de compatibilidad de incentivos coalicionales?. Más aún, ¿Constituyen estos tests una caracterización de las economías perfectamente competitivas?. En economías que no sean física o económicamente "espesas" (thin market economies), ¿no es cierto que sea suficiente considerar el veto de coaliciones pequeñas para obtener los estados del núcleo y de equilibrio?. Será objeto de investigaciones posteriores tratar de dar respuesta a este tipo de preguntas.

En este trabajo, simplemente se ha probado que la ganancia de utilidad que una coalición puede conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante es muy pequeña si aumentamos lo suficiente el número de agentes que constituyen la economía. Ello se ha obtenido como interpretaciones discretas de resultados obtenidos para economías continuas. Concretamente, en economías con un continuo de agente el incentivo de una coalición a no comportarse competitivamente es muy pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. De aquí no se deduce que las respuestas a los precios que son óptimas para una coalición converjan a la respuesta competitiva cuando aumenta el número de agentes. Jackson (1992) prueba que cuando aumenta la economía, las funciones de demanda que son óptimas para cada agente converjen a la demanda competitiva. Sería interesante generalizar este resultado a situaciones más generales, considerando acciones colectivas.

Por otra parte, el hecho de considerar desviaciones de grupos de agentes de un comportamiento precio-aceptante, conduce a plantear conceptos de equilibrio con estrategias colectivas y estudiar propiedades límites.

Por último, es clara la conexión del tema de incentivos con ciertas áreas de la Economía del Bienestar. De hecho, el término compatibilidad de incentivos fue introducido por Hurwicz (1972) precisamente para referirse al problema de implementación de las denominadas reglas de elección social. Así, podrían plantearse estudios que relacionasen estos resultados con temas de Economía del Bienestar.

# Referencias


[1] AUBIN, J.P., FRANKOWSKA, H. (1990): *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston.

[2] ALIPRANTIS, C.D., BROWN, D., BURKINSHAW, O. (1989): *Existence and Optimality of Competitive Equilibria.* Springer-Verlarg. New York.

[3] AUMANN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 34, 1-17.

[4] AUMANN, R.J. (1966): "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[5] BILLINGSLEY, P. (1968): *Convergence of probability measures.* Wiley, New York.

[6] DASGUPTA, P.S., HAMMOND, P.J., MASKIN, E.S. (1979): "The implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility." *Review of Economics Studies*, 46, 163-170.

[7] DEBREU, G., SCARF, H. (1963): "A Limit theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review*, 4, 235-246.

[8] DIERKER, E. (1982): Regular economies, in *Handbook of Mathematical Economics.* K. J. Arrow and M. D. Intriligator, Eds. Volume II, Chap. 17. North-Holland, Amsterdam.

[9] DIESTEL S., UHL J. (1977): *Vector Measures.* Mathematical Surveys and Monographs, 15. Published by the American Mathematical Society.

[10] DUBEY, P., MAS-COLELL, A., SHUBIK, M. (1980): "Efficiency Properties of Strategic Markets Games: An Axiomatic Apprroach." *Journal of Economic Theory*, 22, 339-362.

[11] EDGEWORTH, F.Y. (1881): *Mathematical Psychics.* London: Paul Kegan.

[12] GABSZEWICZ, J.J., VIAL, J.P. (1972): "Oligopoly "a la Cournot" in a general equilibrium analysis." *Journal of Economic Theory*, 4, 381-400.

[13] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Economic Theory*, 3, 577-584.

[14] HAMMOND, P.J. (1987): " Markets as Constraint: Multilateral Incentive Compatibility in Continuum Economies." *Review of Economics Studies*, 54, 399-412.

[15] HERVÉS, C., MORENO, E. (1994): "Strategic Equilibrium in Economies with a Continuum of Agents". Working Paper, 94-35. Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid. ASSET 95.

[16] HERVÉS, C., MORENO, E. (1996): "Algunas consideraciones sobre el mecanismo del veto." Documento de Trabajo, 96-01. Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid.

[17] HILDEBRAND, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton, University Press.

[18] HURWICZ, L. (1972): "On informationally decentralized system." In *Decisions and Organization.* A Volume in Honor of Jacob Marschek. C. B. McGuire and R. Radner, Eds. North-Holland, Amsterdam.

[19] HURWICZ, L. (1979): "On the interaction between information and incentives in organizations." In *Communication and Control in Society.* K. Krippendorff, Ed. Gordon & Breach, New York.

[20] ICHIISHI, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press.

[21] JACKSON, M.O. (1992): "Incentive compatibility and competitive allocations." *Economic Letters*, 40, 299-302.

[22] KHAN, M.A., YANNELIS, N.C. (1991): *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces.* Springer-Verlag. New York.

[23] KLEIN, E., THOMSON, A. (1984): *Theory of Correspondences.* John Wiley & sons. New York.

[24] MAS-COLELL, A. (1974): "Continuous and Smooth Consumers: Approximation Theorems." *Journal of Economic Theory*, 8, 305-336.

[25] MAS-COLLEL, A., NEUEFEIND, W. (1977): "Some generic properties of aggregate excess demand and an application." *Econometrica*, 45, 591-599.

[26] MAS-COLELL, A. (1985): *The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach.* Cambridge University Press.

[27] NOVSHEK, W., SONNENSCHEIN, H. (1978): "Cournot and Walras Equilibrium." *Journal of Economic Theory*, 15, 223-260.

[28] OSTROY, J.M. (1980): "The No-Surplus Condition as a Characterization of Perfectly Competitive Equilibrium." *Journal of Economic Theory*, 22, 183-207.

[29] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[30] OTANI, Y., SICILIAN, J. (1982): "Equilibrium Allocations of Walrasian Preference Games." *Journal of Economic Theory*, 27, 47-68.

[31] OTANI, Y., SICILIAN, J. (1990): "Limit Properties of Equilibrium Allocations of Walrasian Strategic Games." *Journal of Economic Theory*, 51, 295-312.

[32] POSTLEWAITE, A. (1979): "Manipulation via endowments." *Review of Economic Studies*, 46, 255-262.

[33] ROBERTS, J. (1976): "The Incentives for corresct revelation of preferences and the number of consumers." *Journal of Public Economics*, 6, 359-374.

[34] ROBERTS, K. (1980): "The limit points of Monopolistic Competition." *Journal of Economic Theory*, 22, 256-278.

[35] ROBERTS, D.J., POSTLEWAITE, A. (1976): "The incentives for price-taking behavior in large exchange economies." *Econometrica*, 44, 115-127.

[36] ROCKAFELLAR, T. (1970): *Convex Analysis.* Princeton.

[37] SAFRA, Z. (1985): "Existence of Equilibrium for Walrasian Endowment Games." *Journal of Economic Theory*, 37, 366-378.

[38] SCHMEIDLER, D. (1972): "A Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econometrica*, 40, 579-580.

[39] SHUBIK, M. (1959): "Edgeworth Market Games." In *Contribution to the Theory of Games*, vol. IV, ed. by R. Luce and A. Tucker. Princeton University Press.

[40] THOMSON, W. (1979): "The Equilibrium Allocations of Walras and Lindhal Manipulation Games." University of Minnesota. Discussion Paper No. 111.

[41] THOMSON, W. (1987): "Monotonic allocation mechanism." Workin Paper No.116, University of Rochester.

[42] YI, G. (1991): "Manipulation via Withholding: A Generalization." *Review of Economic Studies*, 58, 817-820.

# Capítulo V

## Un test de competencia perfecta: Incentivos coalicionales en el límite

# 1 Introducción

En economías finitas los agentes individuales, y por tanto las coaliciones de agentes, tienen incentivos a declarar características distintas de las reales que mejoran su utilidad indirecta. Desde que Aumann (1964) introdujo un modelo de equilibrio general en una economía continua, la idea de competencia perfecta ha sido asociada a la no existencia de átomos en el espacio de los agentes.

Ostroy y Zame (1994) ponen de manifiesto que, en general, el problema de la competencia perfecta no se resuelve al considerar un continuo de agentes. Muestran que si el espacio de mercancías es de dimenensión infinita, la hipótesis de no existencia de átomos difiere de la hipótesis de competencia perfecta. La distinción se basa en lo que ellos denominan "espesor" o "grosor" de la economía. Sugieren como test de competencia perfecta el hecho de que la manipulación de precios por grupos de agentes, vía falsificación de recursos, sea tan pequeña como se quiera si el tamaño de las coaliciones es arbitrariamente pequeño. Prueban que, si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, existen economías con un continuo de agentes que no superan el test de equivalencia Core-Walras ni el test de withholding. Concretamente, prueban que existe una familia de preferencias y un conjunto abierto de asignaciones iniciales que definen economías, cuyos equilibrios walrasianos no superan ninguno de los dos tests de competencia perfecta. Además, hacen ver que las mismas condiciones de "grosor" de los mercados, que conducen a la equivalencia Core-Walras, garantizan la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio. De hecho, muestran que las economías que consideran tienen la propiedad de que si superan uno de los tests de competencia perfecta, también superan el otro, al menos genéricamente.

Para concluir que una economía continua es perfectamente competitiva deberíamos poder decir que el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. En este trabajo, consideramos una economía con un continuo de agentes definida sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita. Los agentes adoptan comportamientos estratégicos con la intención de manipular precios en su propio beneficio. El conjunto de estrategias de cada agente es lo suficientemente general como para permitir considerar que las estrategias no son sólo recursos sino también preferencias. Entendemos que el incentivo de una coalición a desviarse de un comportamiento precio-aceptante es medido bien por el incremento medio de utilidad indirecta que puedan conseguir los agentes que la forman o bien por el incremento agregado de ésta. Probamos que, bajo determinados supuestos, el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo puede ser despreciado si el tamaño de la coalición es arbitrariamente pequeño. Interpretamos esta propiedad como un test de competencia perfecta, y nos referiremos a él como test de compatibilidad de incentivos coalicionales

El resto de esta nota se organiza como sigue. La sección 2 contiene el modelo, notaciones, definiciones y resultados conocidos. En la sección 3 se define el test de compatibilidad de incentivos coalicionales. En la sección 4 se obtiene que, bajo determinados supuestos, el mecanismo competitivo supera dicho test en el modelo de economías con un número finito de tipos. En la sección 5, se extiende este resultado a economías más generales.

# 2 El Modelo: Notación y definiciones

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ con un continuo de agentes, representados por el intervalo real $I = [0, 1]$. Sea $\mathcal{A}$ la $\sigma$-álgebra de subconjuntos medibles de $I$ y $\mu$ la medida de Lebesgue. El conjunto de mercancías puras es el espacio métrico y compacto $X$. Denotemos por $\mathcal{M}(X)$ el espacio de medidas de Borel sobre $X$ y por $\mathcal{M}^+(X)$ el cono positivo de $\mathcal{M}(X)$. Una cesta de mercancías viene representada por una medida $\alpha \in \mathcal{M}^+(X)$. Recordar que $\mathcal{M}(X)$ es el dual del espacio $\mathcal{C}(X)$ de funciones reales y continuas en $X$. Consideremos en $\mathcal{M}(X)$ la topología débil*, que denotamos por $\sigma^*$, es decir, $\sigma^*$ es la topología menos fina que hace continua la función $(\varphi, \alpha) \to \varphi \cdot \alpha = \int \varphi(x) d\alpha(x)$, cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{C}(X)$.

Fijemos una cesta de referencia $\mu^* \in \mathcal{M}^+(X)$, que nos proporcionará una escala para medir otras cestas de mercancías. Suponemos que $\mu^*$ es sin átomos y *sop* $\mu^* = X$. Podemos pensar en el caso canónico, donde $X = [0, 1]$ y $\mu^*$ la medida de Lebesgue.

Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $M_t \subset \mathcal{M}^+(X)$, sus recursos iniciales $\omega(t) \in M_t$, y su relación de preferencias $\preceq_t$ sobre s $M_t$, representable por una función de utilidad $U_t$.

Una asignación es una función $f : I \to \mathcal{M}^+(X)$ $\sigma^*$-integrable o, lo que es lo mismo, Gelfand integrable, tal que $f(t) \in M_t$ para casi todo $t \in I$. Recordar que $f$ es Gelfand integrable si para cada $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ existe $\alpha \in \mathcal{M}^+(X)$, tal que la aplicación $t \to \varphi \cdot f(t)$ es $\mu$-integrable y $\int \varphi \cdot f(t) d\mu(t) = \varphi \cdot \alpha$. En este caso decimos que $\alpha$ es la integral de Gelfand de $f$, y denotamos $\int f(t) d\mu(t) = \alpha$.

Una asignación $f$ es factible si $\int f(t) d\mu(t) \leq \int \omega(t) d\mu(t)$. Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de asignaciones factibles. Dadas $f, g \in \mathcal{F}$ definimos $d(f, g) = \int \|f(t) - g(t)\| d\mu(t)$. Puede comprobarse que $d$ es una distancia y $(\mathcal{F}, d)$ es un espacio métrico completo.

Dada la asignación inicial $\omega$ de la economía $\mathcal{E}$, denotemos $\overline{\omega} = \int \omega(t) d\mu(t)$. Nos referiremos a $\overline{\omega}$ como la dotación social media. Establecemos la siguiente condición sobre $\overline{\omega}$

(H.1) Existen $a, b \in \mathbb{R}_{++}$, tales que $a\mu^*(B) \leq \overline{\omega}(B) \leq b\mu^*(B)$, para todo conjunto de Borel $B \subset X$.

**Observación.** La hipótesis (H.1) es un supuesto lógico para que $\mu^*$ sea una buena escala de referencia. Nótese que bajo (H.1) se verifica que *sop* $\overline{\omega} = X$, dado de $sop\ \mu^* = X$.

Como $\overline{\omega}$ es absolutamente continua respecto a $\mu^*$ (denotamos $\overline{\omega} \ll \mu^*$), por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función integrable $G$ tal que $\overline{\omega}(B) = \int_B G d\mu^*$, para cada conjunto de Borel $B \subset X$, y $\int \varphi d\overline{\omega} = \int \varphi G d\mu^*$, cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{C}(X)$. El supuesto (H.1) implica que $a \leq G \leq b$. Nos referiremos a $G$ como oferta media y escribimos $\overline{\omega} = G\mu^*$.

Denotemos por $\mathcal{B}(X)$ el conjunto de funciones acotadas definidas en $X$ y con valores reales. Un precio $p$ es un elemento de $\mathcal{B}(X)$, es decir, una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Denotemos por $\mathcal{B}^+(X)$ el cono positivo de $\mathcal{B}(X)$. Nótese que $\mathcal{C}(X), \mathcal{C}^+(X) \subset \mathcal{B}(X)$. Dado un precio $p$ y una cesta de mercancías $\alpha \in \mathcal{M}^+(X)$, el valor que $p$ asigna a $\alpha$ viene dado por $p \cdot \alpha = \int p(x) d\alpha(x)$.

Un equilibrio walrasiano (o competitivo) para la economía $\mathcal{E}$ es un par $(p, f)$, donde $p$ es un precio y $f$ una asignación factible, tales que para casi todo $t \in I$ se verifican las condiciones siguientes
$(a)$ $p \cdot f(t) = p \cdot \omega(t)$
$(b)$ Si $\alpha \in M_t$ y $p \cdot \alpha \leq p \cdot \omega(t)$ entonces $\alpha \preceq_t f(t)$

Para garantizar la existencia de equilibrio walrasiano consideramos en la economía $\mathcal{E}$ los siguientes supuestos sobre las preferencias para casi todo $t \in I$

(H.2) $\preceq_t$ es completa, reflexiva y convexa.

(H.3) $\prec_t$ es estrictamente monótona, es decir, si $\alpha, \beta \in M_t$ y $\beta \neq 0$, entonces $\alpha \prec_t \alpha + \beta$.

(H.4) $\preceq_t$ es continua en la topología de la norma de $\mathcal{M}^+(X)$.

(H.4)' $\preceq_t$ es continua en la topología débil* de $\mathcal{M}^+(X)$.

(H.5) $\preceq_t$ es semicontinua superiormente en la topología débil* de $\mathcal{M}^+(X)$.

(H.6) Dadas las asignacione $f$ y $g$, el conjunto $\{t \in I | f(t) \preceq g(t)\}$ es medible.

**Observaciones.** Nótese que si se verifica (H.4)' entonces se verifican (H.4) y (H.5), pues la topología de la norma de $\mathcal{M}(X)$ es más fuerte que la topología débil*. Por otra parte, la hipótesis (H.6) puede compararse con el supuesto usual de medibilidad para economías sin átomos en el caso finito-dimensional (véase Aumann (1964, 1966)), el cual requeriría que para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{M}^+(X)$ el conjunto $\{t \in I | \alpha \preceq_t \beta\}$ sea medible. (H.6) es más fuerte pues permite comparaciones entre asignaciones arbitrarias y no sólo entre asignaciones constantes. En el caso finito-dimensinal ambos supuestos son equivalentes. Puede probarse que en la situación planteada aquí, con las demás hipótesis establecidas, también son equivalentes.

Consideramos ahora algunos supuestos sobre las relaciones marginales de sustitución entre mercancías

(H.7) Existe una constante $k$, tal que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{M}^+(X)$ y si $\gamma - \alpha + \beta \geq 0$

y $k\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, entonces $\gamma \prec_t \gamma - \alpha + \beta$, para cada $t \in I$.

Esta hipótesis (H.7) es un supuesto fuerte, y simplemente dice que todas las relaciones marginales de sustitución están acotadas. Para establecer el segundo supuesto sobre ratios de sustitución introducimos la notación que sigue. Dada $\gamma \in \mathcal{M}^+(X)$ y dado un conjunto de Borel $Y \subset X$, $\gamma|_Y$ denota la restricción de $\gamma$ a $Y$, es decir, $\gamma|_Y\ (B) = \gamma(B \bigcap Y)$, para cada conjunto de Borel $B \subset X$. Nótese que $\gamma = \gamma|_Y + \gamma|_{(X\setminus Y)}$ . Consideraremos alternativas a $\gamma$ sobre conjuntos $Y$ de diámetro pequeño, concretamente consideraremos medidas $F\mu^*$ restringidas a $Y$. Denotemos por $Ex(F|Y)$ la esperanza condicional de $F$ sobre $Y$, definida por $Ex(F|Y) = \dfrac{1}{\mu^*(Y)}\displaystyle\int_Y F d\mu^*$. Denotemos por $Var(F|Y)$ la varianza condicional de $F$ sobre $Y$, definida por $Ex(F|Y) = \dfrac{1}{\mu^*(Y)}\displaystyle\int_Y (F - Ex(F|Y))^2 d\mu^*$. Dada $\gamma$ supongamos que $\gamma\,|_Y$ es reemplazada por $F\mu^*\,|_Y$. El supuesto siguiente, que llamamos preferencia por la diversidad local, establece condiciones bajo las cuales el cambio es preferido

(H.8) Para cada $r > 1$ existen $\delta > 0$ y $d > 0$, tales que, si

*(i)* $diam(Y) \leq \delta$,

*(ii)* $\dfrac{Var(F|Y)}{Ex(F|Y)} \leq d$, y

*(iii)* $\|[(F\mu^* - \gamma)|Y]^+\| \geq r\|[(F\mu^* - \gamma)|Y]^-\|$,

entonces se verifica que $\gamma \prec_t F\mu^*|_Y + \gamma|_{(X\setminus Y)}$ .

La condición *(i)* dice que la hipótesis se formula sólo para mercancías cercanas, es decir, es un supuesto local. La condición *(ii)* establece un deseo por la diversidad. La condición *(iii)* dice que la masa total de las mercancías recibidas exceda, al menos por $r$, a la masa total de las mercancías entregadas. En particular, que el intercambio neto sea positivo. Nótese que estamos pidiendo un supuesto de preferencia por la diversidad local uniformemente en agentes y mercancías.

El supuesto (H.8) puede compararse con la siguiente hipótesis de sustitución uniforme, utilizada por Jones (1983, 1984,) y relacionada a una noción usada por Mas-Colell (1975) para medidas puramente atómicas, sin parte absolutamente continua.

(H.9) Para todo $r > 1$ existe $\delta > 0$ tal que, si $diam(Y) < \delta$ y $\beta \in \mathcal{M}^+(X)$, con $\beta(Y) \geq \gamma(Y)$, entonces se verifica que $\gamma \prec_t r\beta|_Y + \gamma|_{(X\setminus Y)}$ .

Dicho de otro modo, para todo $r > 1$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\rho > 0$ y para todo $x, x' \in X$ con $\eta(x, x') < \delta$ se verifica que $\gamma + \rho r\delta_x \succ_t \gamma + \rho\delta_{x'}$, siendo $\eta$ la medida considerada en $X$ y $\delta_x$ la medida de Dirac en $x$, es decir, $\delta_x(B) = 1$ si $x \in B$ y $\delta_x(B) = 0$ si $x \notin B$.

Este supuesto (H.9) requiere que las relaciones marginales de sustitución de mercancías cercanas estén uniformemente ceracanas a la unidad. Nótese que (H.9) implica (H.8), pues si $\beta = F\mu^*$ entonces (H.9) puede escribirse como (H.8) sin hacer referencia a la constante $d$ ni a la variabilidad de $F$. Sin embargo (H.8) no implica (H.9).

**Observación.** La proposición 1 en Jones (1983) muestra que podemos interpretar (H.9) como una condición de compacidad de las características. (H.9) dice que las relaciones marginales de sustitución entre agentes no difieren de manera sustancial.

Siguiendo a Ostroy y Zame (1994), decimos que los mercados son económicamente "thick" si se verifican las hipótesis (H.4)' y (H.9), y son físicamente "thick" si se satisface la siguiente condición

(H.10) Existe una constante $K$ tal que $\omega(t) \leq K\mu^*$ para casi todo $t \in I$, equivalentemente existe una constante $\overline{K}$ tal que $\omega(t) \leq \overline{K}\overline{\omega}$ para casi todo $t \in I$. Supongamos que la economía continua $\mathcal{E}$ verifica los supuestos (H.1)-(H.8). Sin pérdida de generalidad podemos identificar precios que coinciden en casi todo punto, siendo el conjunto de clases de equivalencia $L_\infty(\mu^*) = L_\infty(\overline{\omega})$. La norma de un precio $p$ viene dada por $\|p\| = \sup\text{ess}\, p$. Denotemos por $\Pi(\mathcal{E})$ el conjunto de precios de equilibrio competitivo de norma 1 de la economía $\mathcal{E}$.

Por el teorema 1 en Ostroy y Zame (1994), se tiene que

*(i)* Existe equilibrio walrasiano.
*(ii)* Si $p \in \Pi(\mathcal{E})$ entonces $p$ es tan continuo como la oferta media $G$.
*(iii)* $\Pi(\mathcal{E})$ es un subconjunto compacto (en norma) de $L_\infty(\mu^*)$.

Si la economía $\mathcal{E}$ verifica además (H.10), estamos en el caso de mercados físicamente "thick", y según el teorema 4 en el citado artículo Ostroy y Zame, se tiene que

*(i)* Todos los precios de equilibrio son tan continuos como $G$.
*(ii)* Cada asignación inicial supera el test de equivalencia Core-Walras.
*(iii)* Un subconjunto genérico de asignaciones iniciales $\omega$ supera el test de withholding.

Supongamos ahora que la economía $\mathcal{E}$ verifica los supuestos (H.1)-(H.3), (H.4)', (H.6), (H.7), (H.9) y (H.10). Entonces los mercados son también económicamente "thick" y, en consecuencia, según el teorema 3 en el mismo artículo de Ostroy y Zame, se tiene que

*(i)* Cualquier precio de equilibrio $p \in \Pi(\mathcal{E})$ pertenece a un subconjunto compacto (en norma) de $\mathcal{C}(X)$.
*(ii)* Cada asignación inicial supera el test de equivalencia Core-Walras.
*(iii)* Un subconjunto genérico de aignaciones iniciales $\omega$ supera el test de withholding.

# 3 Un test de competencia perfecta: Compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite

Consideremos la economía continua $\mathcal{E} = \{(\preceq_t, \omega(t))\}$ descrita en la sección anterior. Como ya hemos señalado, si los mercados son física y económicamente "thick", puede concluirse que si $p \in \Pi(\mathcal{E})$, entonces $p$ es una función continua, independientemente de la continuidad de la oferta media $G$. De hecho, los precios de equilibrio pertenecen a un conjunto equicontinuo. Las posibilidades de sustitución entre mercancías, establecidas en (H.9), tienen el efecto de eliminar las posibles discontinuidades en los precios de equilibrio que podrían proceder de las discontinuidades en la oferta media. Tanto si los mercados son económicamente "thick" como si son físicamente "thick", se obtiene que la economía $\mathcal{E}$ supera el test de equivalencia Core-Walras y, más aún, un conjunto genérico de asignaciones iniciales supera el test de withholding. (Véanse teoremas 3 y 4 en Ostroy y Zame (1994)). El test de withholding es un test de competencia perfecta que considera desviaciones de un comportamiento precio-aceptante mediante estrategias consistentes en falsificación de recursos. Nuestro interés se centra ahora en plantear un test de competencia perfecta que considere no sólo comportamientos estratégicos que consisten únicamente en recursos, sino también en preferencias.

Sea $\Delta$ el conjunto de precios $p \in \mathcal{B}^+(X)$ cuya norma es 1. Denotemos por $\Gamma_t^*$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$. Esto es, para cada $p \in \Delta$ $\Gamma_t^*(p) = \{\gamma \in \mathcal{M}(X) | \gamma + \omega(t)$ maximiza $U_t$ sobre $B_t(p)\}$, siendo $B_t(p) = \{\alpha \in M_t \subset \mathcal{M}^+(X) | p \cdot \alpha \leq p \cdot \omega_t\}$ la restricción presupuestaria del agente $t \in I$ cuando $p$ es la función de precios que prevalece. El precio $p \in \Delta$ es de equilibrio competitivo en la economía $\mathcal{E}$ si $0 \in \int_I \Gamma_t^*(p) d\mu(t)$. Así, para determinar $\Pi(\mathcal{E})$ basta conocer las correspondencias de respuesta competitiva $\Gamma_t^*$ para cada agente $t \in I$.

**Observación.** Nótese que si $p \in \mathcal{C}(X)$, entonces la restricción presupuestaria $B_t(p)$ es débil* cerrada, y si $p$ es acotada inferiormente, entonces $B_t(p)$ es acotada, es decir, el conjunto $\{\alpha(X) | \alpha \in B_t(p)\}$ es acotado. Así pues, como los conjuntos acotados de $\mathcal{M}(X)$ son condicionalmente compactos, se tiene que la restricción presupuestaria $B_t(p)$ es un conjunto débil* compacto si $p$ es una función continua y acotada inferiormente.

Una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}$ es un conjunto medible $S \subset I$, tal que $\mu(S) > 0$. Estamos interesados en estudiar propiedades de incentivos coalicionales del comportamiento competitivo o precio-aceptante. Para ello, consideramos que los agentes pueden declarar otras correspondencias de respuesta a los precios diferentes de la competitiva $\Gamma_t^*$. Así pues, denotemos por $\Theta_t$ el conjunto de estrategias que el agente $t \in I$ puede utilizar para desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Para cada $t \in I$ se define $\Theta_t$ como el siguiente conjunto de correspondencias de $\mathcal{B}(X)$ en $\mathcal{M}(X)$

$$\Theta_t = \{\Gamma : \mathcal{B}^+(X) \to \mathcal{M}(X) \mid \text{Para cada precio } p \in \mathcal{B}^+(X) \text{ se verifica que } \Gamma(p) + \omega_t \subset M_t \text{ y, } p \cdot \gamma \leq 0 \text{ si } \gamma \in \Gamma(p)\}$$

Por ejemplo, las estrategias de un agente $t \in I$ pueden consistir en las correspondencias de exceso de demanda competitivas resultantes de declarar preferencias definidas por $U'_t$ en vez de $U_t$ y recursos iniciales $\omega'_t \leq \omega_t$.

Un perfil de estrategias es una aplicación $\Theta : I \to \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, tal que $\Theta^S(t) = \Theta^S_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in I$. Sea $S \subset I$ una coalición de agentes de la economía $\mathcal{E}$. Un perfil de estrategias para la coalición $S$ es una aplicación $\Theta^S : S \to \bigcup_{t \in S} \Theta_t$ tal que $\Theta^S(t) = \Theta^S_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in S$. Decimos que una función de precios $p \in \Delta$ es alcanzable por la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, si $p \in \mathcal{C}(X)$ y existe un perfil de estrategias $\Theta^S$ para la coalición $S$ tal que $0 \in \int_{I \setminus S} \Gamma^*_t(p) d\mu(t) + \int_S \Theta^S_t(p) d\mu(t)$. Es decir, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ entonces existen $\gamma^*_t \in \Gamma^*_t(p)$, para cada $t \notin S$ y $\gamma_t \in \Gamma_t(p)$, para cada $t \in S$, con $\Gamma_t \in \Theta_t$, tales que $0 = \int_{I \setminus S} \gamma^*_t d\mu(t) + \int_S \gamma_t d\mu(t)$. Decimos entonces que $\alpha^S : S \to \mathcal{M}^+(X)_t$, con $\alpha^S(t) = \gamma_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $\alpha^S \in \mathcal{F}(S, \mathcal{E})$.

**Observación.** Supongamos que consideramos como estrategias recursos y preferencias. De este modo si los agentes declaran un perfil de estrategias $\theta$ aparentan una economía $\mathcal{E}_\theta$ diferente de la inicial $\mathcal{E}$. En este caso los precios alcanzables por una coalición son los precios de equilibrio de las economías que dicha coalición pueda aparentar. Como los mercados son físicamente "thick", se obtiene que si una coalición $S$ declara un perfil $\theta^S$, aparentando una economía $\mathcal{E}_{\theta^S}$, los precios de equilibrio de $\mathcal{E}_{\theta^S}$ son funciones continuas si lo es la oferta media $G_{\theta^S}$ de la economía $\mathcal{E}_{\theta^S}$ que aparenta $S$. Si además las preferencias permitidas se restringen a aquellas que verifiquen (H.9) los mercados de las economías aparentes son econónomicamente "thick". En este caso los precios de equilibrio de las economías aparentes son funciones continuas, independientemente de la continuidad de las ofertas medias.

A pesar de que en economías sin átomos con un espacio de mercancías de dimensión infinita las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que en el caso que venimos considerando tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. De hecho, para concluir que una economía continua es perfectamente competitiva deberíamos poder decir que tiene la propiedad de que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Interpretamos esta propiedad como un test de competencia perfecta, y nos referiremos a él como test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. A continuación formalizamos dicho test.

**Definición** 3.1 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$ si para cualquier sucesión de coaliciones $(S_n) \subset I$, con $\mu(S_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$, tal que para todo $n \geq \bar{n}$ se tiene lo siguiente. Si $\alpha^n \in \mathcal{F}(S_n, \mathcal{E})$ entonces existe $\alpha$ asignación competitiva de $\mathcal{E}$ tal que $U_t(\alpha(t)) > U_t(\alpha^n(t)) - \varepsilon$, para casi todo $t \in S_n$.*

**Definición** 3.2 *Decimos que la economía $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales si el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$.*

La interpretación de la definición de compatibilidad coalicional en el límite es la siguiente. Consideremos que el incentivo de una coalición a comportarse no competitivamente viene dado por la ganancia agregada de utilidad (o si se quiere por la ganancia media) que los agentes que la forman pueden conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Entonces, si el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite, se tiene que el incentivo de cualquier coalición $S \subset I$ a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. En este caso, diremos que la economía supera el test de competencia perfecta que hemos denominado test compatibilidad de incentivos coalicionales.

# 4 Test de compatibilidad de incentivos coalicionales en economías continuas de $m$ tipos de agentes

Consideremos una economía continua $\mathcal{E}$ como la descrita en la sección 2, done la capacidad limitada del observador sólo permite distinguir un número finito de tipos, digamos $m$. Así, el intervalo $I = [0, 1]$ aparece dividido en $m$ subintervalos $I_i, i = 1, \ldots, m$ disjuntos dos a dos, con $I_i = [q_{i-1}, q_i)$ si $i \neq m$, $I_m = [q_{m-1}, 1]$, con $q_0 = 0$ y $q_i \in \mathbb{Q}$. Los agentes que constituyen el intervalo $I_i$ tienen características iguales, esto es, $M_t = M_i$, $\omega(t) = \omega_i$ y $\preceq_t = \preceq_i$ para cada $t \in I_i$. La medida $\mu(I_i)$ de cada subintervalo $I_i$ representa el peso relativo que los agentes de tipo $i$ tienen en la economía.

**Observación.** Nótese que estamos considerando subintervalos de extremos racionales. Por tanto, podemos escribir $q_i = \frac{a_i}{q}$, con $a_i, q \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$. De este modo, podemos considerar que el intervalo $I = [0, 1]$ está dividido en $q$ subintervalos de igual longitud, con $q \geq m$. En este caso puede suceder que subintervalos distintos represenes tipos idénticos. Por ello, aunque los subintervalos que representan diferentes tipos no tengan por qué ser de la misma longitud, por simplicidad suponemos que $I_i = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$, si $i \neq m$, $I_m = \left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$.

Para garantizar existencia de equilibrio walrasiano, supongamos que la economía continua $\mathcal{E}$ de $m$ tipos verifica los supuestos (H.1)-(H.8).

**Observaciones.** Nótese que, como $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)\omega_i$, bajo (H.1) se verifica que $\mu^*(B) = 0$ si y sólo si $\overline{\omega}(B) = 0$ si y sólo si $\omega_i(B) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto es, $\overline{\omega}$ y $\omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, son absolutamente continuas respecto a $\mu^*$ y viceversa. Por tanto, para cada $i$ existe una función integrable $G_i$ tal que $\omega_i(B) = \int_B G_i d\mu^*$, para cada conjunto de Borel $B \subset X$. Lueg, $\overline{\omega}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)\omega_i(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) \int_B G_i(B) d\mu^* = \int_B G d\mu^*$.

Por otra parte, (H.1) implica que $\omega_i \leq b\mu^*$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, estamos en el caso de economías con mercados físicamente "thick" en el sentido de Ostroy y Zame (1994). Por otra parte, como $\omega$ es débil*-medible y $\omega(t) \leq b\mu^*$ para todo $t \in I$, se deduce que $\omega$ es medible en norma y, en consecuencia, es Bochner integrable.

Supongamos ahora que $\mathcal{E}$ verifica también los supuestos (H.4)' y (H.9). Entonces los mercados son económicamente "thick". En este caso, si $p \in \Pi(\mathcal{E})$, entonces $p$ es una función continua, independientemente de la continuidad de la oferta media $G$. Además por los resultados conocidos, que se han citado en la sección 2, se obtiene que la economía $\mathcal{E}$ supera el test de equivalencia Core-Walras y, más aún, un conjunto genérico de asignaciones iniciales supera el test de withholding. El objetivo de esta sección es aplicar el test de compatibilidad de incentivos coalicionales a esta economía continua de $m$ tipos.

Denotemos por $\Gamma_i^*$ la correspondencia de exceso de demanda competitiva de los agentes $t \in I_i$, esto es, de los agentes de tipo $i$. Y denotemos $\Theta_i = \Theta_t$, para cada $t \in I_i$. Esto es, $\Theta_i$ es el conjunto de estrategias para los agentes de tipo $i$.

Para comprobar la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo, establecemos algunos resultados previos.

**Lema** 4.1 *Si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ para alguna coalición $S \in \mathcal{A}$, entonces $p$ es alcanzable por $S$ vía una estrategia común para todos los agentes del mismo tipo.*

*Demostración.* Sea una coalición $S \subset I$ y sea $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$. Entonces existen $\gamma_t^* \in \Gamma_t^*(p)$, para cada $t \in I \setminus S$ y existen $\gamma_t \in \Gamma_t(p)$, con $\Gamma_t \in \Theta_t$, para cada $t \in S$, tales que $0 = \sum_{i=1}^{m} \int_{I_i \setminus S^i} \gamma_t^* d\mu(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_{S^i} \gamma_t d\mu(t)$. Definamos $\gamma_i^* = \frac{1}{\mu(I_i \setminus S^i)} \int_{I_i \setminus S^i} \gamma_t^* d\mu(t)$ para cada $i$ tal que $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$, y $\gamma_i = \frac{1}{\mu(S^i)} \int_{S^i} \gamma_t d\mu(t)$ para cada $i$ tal que $\mu(S^i) > 0$. Por construcción de $\gamma_i$ y por definición de los conjuntos de estrategias, se tiene que $\gamma_i \in \Theta_i$, para todo $i$. Basta ahora probar que para cualquier tipo $i$ se verifica que $\gamma_i^* \in \Gamma_i^*(p)$. Supongamos que no sucede así. Por construcción $p \cdot \gamma_i^* \leq 0$ para todo $i$. Luego, si $\gamma_i^* \notin \Gamma_i^*(p)$ para algún tipo

$i$, entonces existe $\beta \in \mathcal{M}^+(X)$ tal que $p \cdot \beta \leq p \cdot \omega_i$ y $\beta \succ_i \gamma_i^* + \omega_i$. Consideremos el conjunto $A = \{\alpha \in \mathcal{M}^+(X) | \alpha \succeq_i \beta\}$. Nótese que $\gamma_t^* + \omega_i \in A$, para todo $t \in I_i \setminus S^i$. Teniendo en cuenta que los conjuntos de consumo son convexos y cerrados y las preferencias continuas y convexas, se deduce $A$ es cerrado y convexo. Por otra parte, se tiene que $\gamma_i^* + \omega_i \in co((\gamma^* + \omega)(I_i \setminus S^i))$. Luego $\gamma_i^* + \omega_i \in A$, lo que contradice que $\beta \succ_i \gamma_i^* + \omega_i$. En consecuencia, para todo $i$ se tiene que $\gamma_i^* \in \Gamma_i^*(p)$. Esto permite concluir que, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, $p$ es alcanzable por la coalición $S$ vía un perfil de estrategias $\Theta^S$ constante en tipos.

Q.E.D.

**Lema** 4.2 *Sean las coaliciones $S, S' \subset I$, verificando $\mu(S^i) \leq \mu(S'^i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $\Pi(S, \mathcal{E}) \subset \Pi(S', \mathcal{E})$.*

*Demostración.* Basta tener en cuenta que la correspondencia de exceso de demanda $\Gamma_i^*$ de los agentes de tipo $i$ pertenece a su conjunto de estrategias $\Theta_i$ cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, y aplicar el lema anterior.

Q.E.D.

**Lema** 4.3 *Para cada sucesión de coaliciones $(S_n)$, tal que $\mu(S_n)$ converge a cero, existe una sucesión de coaliciones $(S'_n)$, tal que $\mu(S'_n)$ converge a cero y además $\Pi(S_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo $n$.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que $\mu(S_n) \to 0$, definamos la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue. Dado $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(k)$ es un entero positivo, tal que para todo $n \geq \sigma(k)$ se verifica $\mu(S_n^i) \leq \frac{1}{m+k}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Además $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, para todo $k$. Tomamos $S'_n = \bigcup_{i=1}^m S'^i_n$, con $S'^i_n = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i-1}{m} + \frac{1}{m+k}\right)$, si $\sigma(k) \leq n < \sigma(k+1)$. Por construcción $\mu(S'_n)$ converge a cero y para cada $n$ se verifica $\mu(S_n^i) \leq \mu(S'^i_n)$ y $\mu(S'^i_n) \leq \mu(S'^i_{n+1})$, cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, $\Pi(S_n, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$ y $\Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo $n$.

Q.E.D.

**Lema** 4.4 *Sea $S$ una coalición de agentes tal que $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$. Supongamos que se verifica (H.7). Entonces cualquier $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ verifica que $k^{-1} \leq p$.*

*Demostración.* Sea $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$. Por el lema 4.1 se verifica que existen $\gamma_i^* \in \Gamma_i^*(p)$ y $\gamma_i \in \Gamma_i(p)$, con $\Gamma_i \in \Theta_i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i)\gamma_i^* + \sum_{i=1}^m \mu(S^i)\gamma_i$. Sea $i$ tal que $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$. Por la hipótesis (H.7) se tiene que si $\|\alpha\| = \|\beta\|$ entonces $p \cdot \alpha \leq k(p \cdot \beta)$, pues si no fuera así entonces $\gamma_i^* + \omega_i$ no estaría maximizando $U_i$ sobre la restricción presupuestaria $B_i(p)$. Por otra parte como $X$ es compacto y $p$ es una función continua se tiene que existen $x_m, x_M \in X$ tales que $p(x_m) = \inf_{x \in X} p(x)$ y $p(x_M) = \sup_{x \in X} p(x)$. Consideremos las medidas de Dirac en $x_m$ y $x_M$.

Se obtiene entonces que $p\cdot\delta_{x_M} \leq k(p\cdot\delta_{x_M})$, esto es $\sup_{x\in X} p(x) \leq k \sup_{x\in X} p(x)$. Luego $\sup_{x\in X} p(x) \geq k^{-1}$.

Q.E.D.

**Lema** 4.5 *Sea $(S_n)$ una sucesión de coaliciones, tal que $\mu(S_n)$ converge a cero. Si $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$, para todo $n \geq n_0$, entonces $p \in \Pi(\mathcal{E})$.*

*Demostración.* Sea $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$ para todo $n \geq n_0$. Por el lema 4.1 se verifica que existen $\gamma_i^{*n} \in \Gamma_i^*(p)$ y $\gamma_i^n \in \Gamma_i^n(p)$, con $\Gamma_i^n \in \Theta_i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S_n^i)\gamma_i^{*n} + \sum_{i=1}^m \mu(S_n^i)\gamma_i^n$. Para cada $n \geq n_0$ consideremos la asigación factible $\alpha^n$ definida por

$$\alpha^n(t) = \begin{cases} \gamma_i^{*n} + \omega_i & \text{si } t \in I_i \setminus S_n^i \\ \gamma_i^n + \omega_i & \text{si } t \in S_n^i \end{cases}$$

Nótese que $p\cdot\alpha^n(t) \leq p\cdot\omega_i$ para todo $t \in I_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por el lema 4.4 se tiene que $p \geq k^{-1}$. Luego la sucesión de asignaciones $(\alpha^n)$ está acotada. Por tanto, existe una función $\alpha$ Gelfand-integrable tal que $\alpha^n$ converge débilmente a $\alpha$. Denotamos $\alpha^n \xrightarrow{\sigma} \alpha$, siendo $\sigma$ la topología débil en $\mathcal{M}^+(X)$. Veamos que $(p, \alpha)$ es equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}$. Como para cada $n \geq n_0$ se verifica que $\int \alpha^n(t)d\mu(t) \leq \int \omega(t)d\mu(t)$ y $\alpha^n \xrightarrow{\sigma} \alpha$, se tiene que $\int \alpha d\mu(t) \leq \int \omega(t)d\mu(t)$. Luego $\alpha \in \mathcal{F}$. Además $p\cdot\alpha(t) \leq p\cdot\omega(t)$ para casi topo $t \in I$. En efecto, si no fuera así, existe $i$ y existe $S \subset I_i$, con $\mu(S) > 0$, tal que $p\cdot\alpha(t) > p\cdot\omega_i$ para todo $t \in S$. Esto implica que $p\cdot(\mu(S))^{-1}\int_S \alpha(t)d\mu(t) > p\cdot\omega_i$. Por la convergencia débil de $(\alpha^n)$ se tiene que $(\mu(S))^{-1}\int_S \alpha^n(t)d\mu(t)$ converge a $(\mu(S))^{-1}\int_S \alpha(t)d\mu(t)$. Luego existe $\hat{n}$ tal que para todo $n \geq \hat{n}$ se verifica que $p\cdot\alpha^n(t) > p\cdot\omega_i$, para todo $t \in S' \subset S$, con $\mu(S') > 0$. Pero esto contradice el que $p\cdot\gamma_i^* \leq 0$ para todo $i$. Luego si $(p, \alpha)$ no es equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}$ existe $S \subset I_i$ con $\mu(S) > 0$, y existe $\beta \in \mathcal{M}^+(X)$ tal que $p\cdot\beta \leq p\cdot\omega_i$ y $\beta \succ_i \alpha(t)$ para todo $t \in S$. Esto implica que $\beta \succ_i (\mu(S))^{-1}\int_S \alpha(t)d\mu(t)$. Por tanto, $\beta \succ_i \gamma^{*n} + \omega_i$ para todo $n \geq n^*$. Pero esto contradice el que $\gamma_i^{*n} \in \Gamma_i^*(p)$ para todo $n \geq n_0$.

Q.E.D.

**Lema** 4.6 *Supongamos que el conjunto de consumo $M_t \subset \mathcal{M}_+(X)$ de cada agente $t \in I$ es débil*-compacto. Entonces la correspondencia de esceso de demanda competitiva $\Gamma_t^*$ son semicontinuas superiormente.*

*Demostración.* Como $\Gamma_t^*$ toma valores en un conjunto débil*-compacto, basta ver que $\Gamma_t^*$ tiene grafo cerrado. Para ello, sea $(p_n)$ una sucesión de precios convergente a $p$ y sea $(\gamma_n)$ una sucesión en $\mathcal{M}(X)$ convergente a $\gamma$ en la topología débil*, tales que $\gamma_n \in \Gamma_t^*(p_n)$ para todo $n$. Sea $\alpha \in B_t(p)$. Veamos que $\gamma + \omega(t) \succeq_t \alpha$. Existe una sucesión $(\alpha_n) \subset M_t$, tal que $\alpha_n$ converge débilemente a $\alpha$ y $\alpha_n \in B_t(p_n)$ (véase Mas-Colell (1975), lema 5). Luego $\gamma_n + \omega(t) \succeq_t \alpha_n$. Por la hipótesis de continuidad de las preferencias, se deduce que $\gamma + \omega(t) \succeq_t \alpha$. Por tanto, se conluye que $\gamma \in \Gamma_t^*(p)$.

Q.E.D.

**Lema** 4.7 *Supongamos que se verifica (H.7). Entonces el conjunto* $\Pi(S, \mathcal{E})$ *es cerrado para cualquier coalición* $S \subset I$*, tal que* $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$ *para algún* $i \in \{1, \ldots, m\}$*. En particular, dada una sucesión de coaliciones* $(S_n)$*, con* $\mu(S_n) \to 0$*, el conjunto* $\Pi(S_n, \mathcal{E})$ *es cerrado para todo* $n \geq n_0$*.*

*Demostración.* Sea $(p_n)$ una sucesión de precios convergente a $\bar{p}$, tal que $p_n \in \Pi(S, \mathcal{E})$ para todo $n$. Por definición de los conjuntos de estrategias se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ la correspondencia $\Psi_i : \Delta \to \mathcal{M}(X)$, definida por $\Psi_i(p) = \{\gamma \in \mathcal{M}(X) |$ existe $\Gamma_i \in \Theta_i$, tal que $\gamma \in \Gamma_t(p)\}$, tiene grafo cerrado, cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por el lema 4.4 se tiene que $p_n \geq k^{-1}$ para todo $n$. Luego, $\Psi_i(p_n)$ y $\Psi_i(\bar{p})$ son cerrados y acotados inferiormente. Por otra parte, las correspondencias $\Gamma_i^*$ son semicontinuas superiormente y toman valores débil*-cerrados y acotados inferiormente para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego la correspondencia $\Psi : \Delta \to \mathcal{M}(X)$, definida por $\Psi_i(p) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i)\Gamma_i^*(p) + \sum_{i=1}^m \mu(S^i)\Psi_i(p)$ tiene grafo cerrado. Luego, como $0 \in \Psi(p_n)$, se concluye que $0 \in \Psi(\bar{p})$, esto es, $\bar{p} \in \Pi(S, \mathcal{E})$.

Q.E.D.

Consideremos una sucesión de coaliciones $(S_n)$, con $\mu(S_n) \to 0$. Supongamos que el incentivo de la coalición $S_n$ a desviarse de un comportamiento precio-aceptante viene dado bien por el incremento medio de utilidad que pueden conseguir los agentes que la forman, o bien por el incremento agregado. A continuación se prueba que entonces el incentivo de la coalición $S_n$ a adoptar un comportamiento no competitivo es arbitrariamente pequeño si $n$ es suficientemente grande.

**Teorema** 4.1 *Sea* $\mathcal{E}$ *una economía que verifica las hipótesis (H.1)-(H.3), (H.4)', (H.6), (H.7) y (H.9), y tal que los conjuntos de consumo* $M_t \subset \mathcal{M}_+(X)$ *son débil*-compactos. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en* $\mathcal{E}$*.*

*Demostración.* Supongamos que no se verifica la compatibilidad en incentivos coalicional en el límite. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y existe una sucesión de asignaciones $(\alpha^k)$ tal que $\alpha^k \in \mathcal{F}(S_k, \mathcal{E})$, y tal que para cada asignación competitiva $\alpha$ existe algún tipo de agente $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ para el que se verifica $U_{i_0}(\alpha_t^k) > U_{i_0}(\alpha_t) + \varepsilon$, , para casi todo $t \in S^{i_0}$, para todo $k$. Sea $p^k \in \Pi(S_k, \mathcal{E})$ el sistema de precios vía el cual $\alpha^k$ es una asignación alcanzable por la coalición $S$. Por el lema 4.2, existe $(S_k')$, con $\mu(S_k') \to 0$, tal que $p^k \in \Pi(S_{k'}', \mathcal{E})$, para todo $k' \leq k$. $(p^k)$ es acotada y, por tanto, contiene una subsucesión, que también denotamos $(p^k)$, convergente a $p$. Por el lema 4.7, $\Pi(S_k', \mathcal{E})$ es cerrado para todo

$k > k_0$. Luego, $p \in \bigcap_{k>k_0} \Pi(S'_k, \mathcal{E})$. Aplicando el lema 4.5 se tiene que $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Por otra parte se tiene que $V_i(p^k) \geq U_t(\alpha_t^k)$, para casi todo $t \in S^i$, para todo $i$ y para todo $k$. Sea $\alpha$ asignación de equilibrio competitivo a precios $p$, con $\alpha_t = \alpha_i$ para casi todo $t \in I_i$, para todo $i$. Como las correspondencias de demanda son semicontinuas superiormente en $p$, se obtiene que $V_i$ es continua en $p$. Por tanto, $\lim_k sup\ U_t(\alpha_t^k) \leq V_t(p) = V_t(\alpha_t)$, para casi todo $t \in I$. Por definición, existe $\bar{k}$ tal que $\lim_k sup\ U_i(\alpha_i^k) \geq U_i(\alpha_i^k) - \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $i$, para todo $k \geq \bar{k}$. Se obtiene entonces una contradicción con que $U_{i_0}(\alpha_{i_0}^k) > U_{i_0}(\alpha_{i_0}) + \varepsilon$, para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, para todo $k$.

Q.E.D.

Obtenemos de este modo que una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distinguen un número finito de características distintas, y con un espacio de mercancías de dimensión infinita, supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

Este resultado no es cierto si los mercados son económicamente "thin". De hecho, Ostroy y Zame (1994) prueban que en este caso, existe una familia de preferencias (no débil*-continuas), y un conjunto abierto de asignaciones iniciales para las que cualquier equilibrio competitivo no supera el test de withholding. Los ejemplos de las economías que ellos plantean para probar esto, podrían adaptarse aquí para mostrar que esas economías no superan el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

# 5 Test de compatibilidad de incentivos coalicionales en economías continuas más generales

En la sección anterior se ha probado que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en economías continuas con un número finito de tipos. El objetivo de esta sección es extender el teorema 4.1 a situaciones más generales, esto es, a economías continuas que no necesariamente sean de $m$ tipos. Como veremos a continuación, para obtener la compatibilidad coalicional en el límite en casos más generales, es condición suficiente la continuidad de la correspondencia $\Pi$ de precios que vacia los mercados. Para formalizar dicha condición necesitamos definir una topología en el conjunto de economías.

Sea $\mathcal{E}$ una economía como la descrita en la sección 2. Supongamos que la $\mathcal{E}$ verifica (H.10), esto es, existe $K$ tal que $\omega(t) \leq K\mu^*$, para casi todp $t \in I$. Supongamos también que $M_t = M$ para casi todo $t \in I$, y $M$ compacto. En este caso, denotamos por $\Theta$ el conjunto de estrategias de cada agente $t \in I$, definido como sigue

$$\Theta = \{\ \Gamma : P \to M - K\mu^* \mid \ \Gamma \text{ es una correspondencia cerrada, con valores no vacios, y } \ p \cdot \gamma \leq 0 \ \text{ si } \ \gamma \in \Gamma(p)\}$$

donde $P \subset \Delta$ es un subconjunto equicontinuo arbitrario.

Decimos que una correspondencia $\Gamma$ definida en $P$ y con valores en $M - K\mu^*$ es cerrada si su grafo $\mathcal{G}r(\Gamma) = \{(p,\gamma) \in P \times (M - K\mu^*) | \gamma \in \Gamma(p)\}$ es cerrado en $P \times (M - K\mu^*$. Denotemos por $\mathcal{F}(P \times (M - K\mu^*))$ el conjunto formado por todos los subconjuntos cerrados no vacios de $P \times (M - K\mu^*)$. Consideremos en $\mathcal{F}(P \times (M - K\mu^*))$ la la distancia de Hausdorff, que denotamos por $\delta_H$. $P \times (M - K\mu^*)$ es un espacio métrico compacto. Por tanto, $(\mathcal{F}(P \times (M - K\mu^*)), \delta_H)$ es un espacio métrico compacto. Como cada correspondencia $\Gamma \in \Theta$ es cerrada, podemos interpretar $\Theta$ como un subconjunto de $\mathcal{F}(P \times (M - K\mu^*))$. Consideremos en $\Theta$ la distancia $\delta_H$.

Un perfil de estrategias es una aplicación medible $\theta : I \to \Theta$. Sea $\theta^*$ el perfil de estrategias dado por $\theta^*(t) = \Gamma_t^*$, para cada $t \in I$. Para determinar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ es suficiente describir $\mathcal{E}$ como una medida $\vartheta^*$ sobre $\Theta$, definida por $\vartheta^* = \mu \circ (\theta^*)^{-1}$. Nos referiremos a $\vartheta^*$ como la medida de probabilidad que describe la economía $\mathcal{E}$ .

Sea $\mathcal{M}(\Theta)$ el conjunto de medidas de probabilidad de Borel sobre $\Theta$. Consideremos en $\mathcal{M}(\Theta)$ la topología de la convergencia débil de medidas. Cada perfil de estrategias $\theta$ define una medida de probabilidad $\vartheta_\theta \in \mathcal{M}(\Theta)$ dada por $\vartheta_\theta = \mu \circ \theta^{-1}$. Además, cada elemento de $\mathcal{M}(\Theta)$ puede entenderse como la descripción de una economía abstracta.

Dado un sistema de precios $p \in P$ definimos la correspondencia $\varphi(\cdot, p) : \Theta \to M - K\mu^*$ dada por $\varphi(\Gamma, p) = \Gamma(p)$, para cada $\Gamma \in \Theta$. Decimos que $p \in P$ es un sistema de precios que vacia los mercados en la economía descrita por la medida $\vartheta \in \mathcal{M}(\Theta)$, y denotamos $p \in \Pi(\vartheta)$, si $0 \in \int_\Theta \varphi(\Gamma, p) d\vartheta = \int_\Theta Z(p) d\vartheta$. Decimos que un sistema de precios $p \in P$ es alcanzable por la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, si existe un perfil de estrategias $\theta$, con $\theta(t) = \Gamma_t^*$ para cada $t \notin S$, tal que $0 \in \int_\Theta \varphi(\Gamma, p) d\vartheta_\theta$, equivalentemente, $p \in \Pi(\vartheta_\theta)$. Luego, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ entonces existen $\gamma_t^* \in \Gamma_t^*(p)$, para cada $t \notin S$ y $\gamma_t \in \Gamma_t(p)$, con $\Gamma_t \in \Theta$ para cada $t \in S$, tales que $0 = \int_{I \setminus S} \gamma_t^* d\mu(t) + \int_S \gamma_t d\mu(t)$. Decimos entonces que $\alpha^S : S \to M$, con $\alpha^S(t) = \gamma_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición $S$ en la economía $\mathcal{E}$ , y denotamos $\alpha^S \in X(S, \mathcal{E})$.

**Teorema** 5.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua que satisface las hipótesis (H.1)-(H-8) y (H.10). Sea $\vartheta \in \mathcal{M}(\Theta)$ una medida de probabilidad que describe a $\mathcal{E}$ . Supongamos que la correspondencia de precios que vacian los mercados es continua en $\vartheta$ y que las funciones indirectas de utilidad $V_t$ existen y son continuas en un entorno de $\Pi(\vartheta)$ para casi todo agente $t \in I$. Entonces $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.*

*Demostración.* Supongamos que no se verifica la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite. Entonces, existe una sucesión $(S_n)$, con $\mu(S_n) \to 0$, existe $\varepsilon > 0$ y, existe una sucesión de asignaciones $(\alpha^n) \in X(S_n, \mathcal{E})$, tales que para cada asignación competitiva $\alpha^*$ de $\mathcal{E}$ se verifica $U_t(\alpha^n(t)) > U_t(\alpha^*(t)) + \varepsilon$, para todo $t \in S'_n \subset S_n$, con $\mu(S'_n) > 0$, para todo $n$. Para cada $n$, sea $p_n \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$ la función de precios vía la cual $\alpha^n$ es una asignación alcanzable por la coalición $S_n$ en la economía $\mathcal{E}$, y sea $\theta_n$ el perfil de estrategias vía el cual $p_n$ es alcanzable por la coalición $S_n$ en la economía $\mathcal{E}$. Consideremos $\vartheta'_n = \mu \circ \theta_n^{-1}$. Como $\mu(S_n)$ converge a cero, se tiene que $\vartheta'_n$ converge débilmente a $\vartheta$. Por la continuidad de $\Pi$ en $\vartheta$ se tiene que para cada $\delta > 0$ existe $\bar{n}$ tal que $\delta_H(\Pi(\vartheta), \Pi(\vartheta_n)) < \delta$, para todo $n \geq \bar{n}$. Luego, para cada $n$ suficientemente grande, existe $p_n^* \in \Pi(\vartheta)$ tal que $p_n^*$ está arbitrariamente cercano a $p_n$ y ambos en un entorno de $\Pi(\vartheta)$, donde las funciones $V_t$ son continuas. Sea $\alpha_n^*$ asignación competitiva a precios $p_n^*$ en la economía $\mathcal{E}$. Se tiene entonces que $V_t(p_n) \geq U_t(\alpha^n(t)) > U_t(\alpha_n^*(t)) + \varepsilon = V_t(p_n^*) + \varepsilon$, para todo $t \in S''_n \subset S'_n$, con $\mu(S''_n) > 0$, para cada $n$ suficientemente grande. Pero esto contradice la continuidad de las funciones de utilidad indirecta.

Q.E.D.

# Referencias


[1] AUBIN, J.P., FRANKOWSKA, H. (1990): *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston.

[2] AUMANN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 34, 1-17.

[3] AUMANN, R.J. (1966): "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[4] BEWLEY, T.F. (1972): "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities." *Journal of Economic Theory*, 4, 514-540.

[5] BILLINGSLEY, P. (1968): *Convergence of probability measures.* Wiley, New York.

[6] CASTAING, C., VALADIER, M. (1977): *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York.

[7] DIESTEL S., UHL J. (1977): *Vector Measures.* Mathematical Surveys and Monographs, 15. Published by the American Mathematical Society.

[8] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Economic Theory*, 3, 577-584.

[9] HERVÉS, C., MORENO, E. (1994): "Strategic Equilibrium in Economies with a Continuum of Agents". Working Paper, 94-35. Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid. ASSET 95.

[10] HILDEBRAND, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton, University Press.

[11] HURWICZ, L. (1972): "On informationally decentralized system." In *Decisions and Organization.* A Volume in Honor of Jacob Marschek. C. B. McGuire and R. Radner, Eds. North-Holland, Amsterdam.

[12] ICHIISHI, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press.

[13] JONES, L. (1983): "Existence of Equilibria with Infinitely Many Customers and Infinitely Many Commodities: A Theorem Based on Models of Commodity Differentiation." *Journal of Mathematical Economics*, 12, 119-139.

[14] JONES, L. (1984): "A Competitive Model of Commodity Differentiation." *Econometrica*, 52, 507-530.

[15] KHAN, M.A., YANNELIS, N.C. (1991): *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces.* Springer-Verlag. New York.

[16] KLEIN, E., THOMSON, A. (1984): *Theory of Correspondences.* John Wiley & sons. New York.

[17] MAS-COLELL, A. (1975): "A Model of Equilibrium with Differentiated Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 2, 263-295.

[18] MAS-COLELL, A. (1985): *The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach.* Cambridge University Press.

[19] OSTROY, J.M. (1980): "The No-Surplus Condition as a Characterization of Perfectly Competitive Equilibrium." *Journal of Economic Theory*, 22, 183-207.

[20] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[21] ROBERTS, D.J., POSTLEWAITE, A. (1976): "The incentives for price-taking behavior in large exchange economies." *Econometrica*, 44, 115-127.

[22] ROCKAFELLAR, T. (1970): *Convex Analysis.* Princeton.